

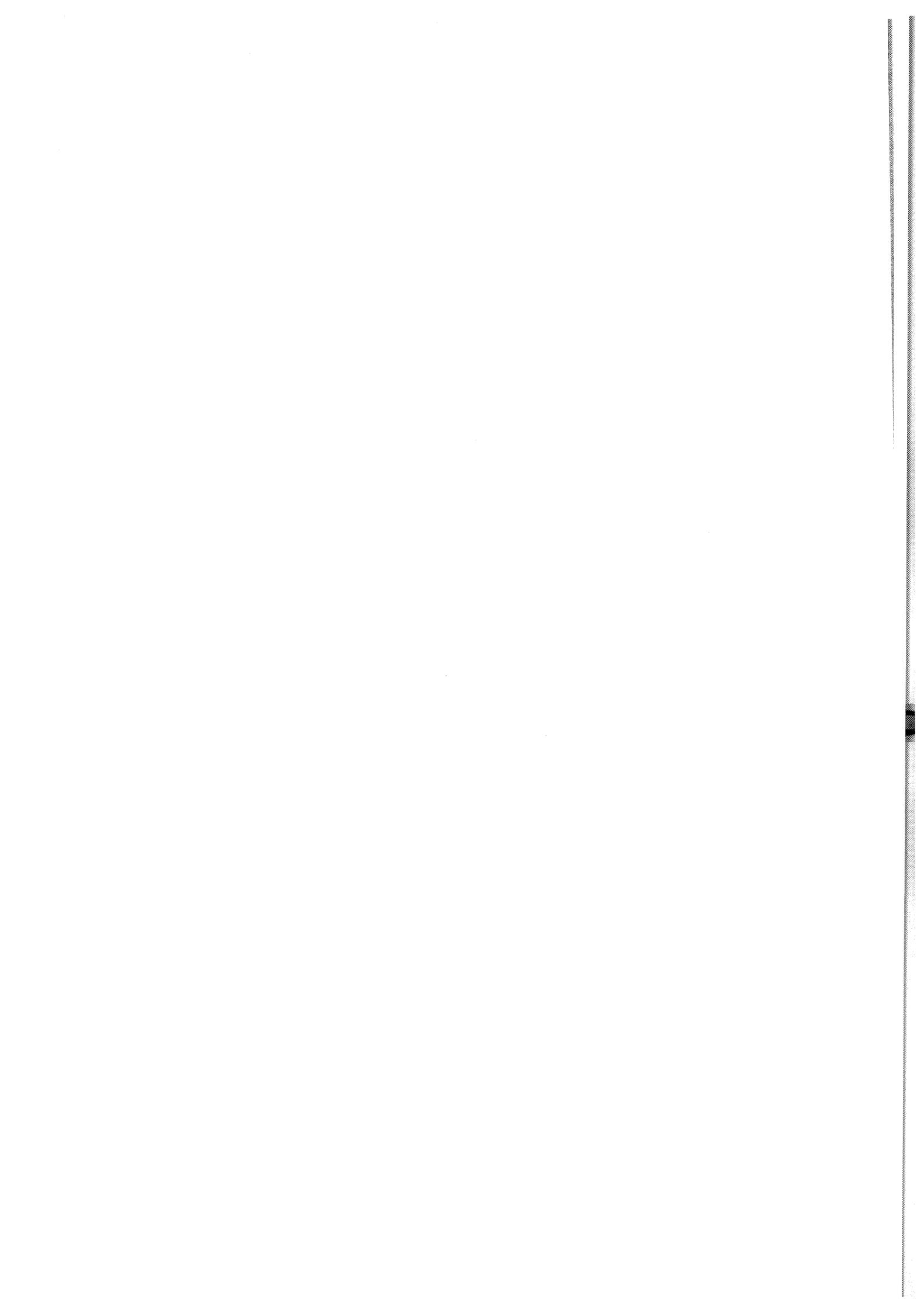
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΣΚΟΚΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ
ΔΟΜΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΦΑΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΙΩΝ ΒΑΘΜΩΝ
ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΘΗΝΑ 1997



**Στη σύζυγο μου Ειρήνη, η οποία ήταν πάντα δίπλα μου
όταν τη χρειαζόμουν. Χωρίς την πίστη της σε μένα,
την αντοχή της και την ανοχή της η διατριβή αυτή
δε θα είχε ποτέ πραγματοποιηθεί.**

**Στον αγαπημένο φίλο και συνάδελφο Γιώργο Μιχαήλ
που έφυγε από κοντά μας τόσο νωρίς και τόσο άδικα.**

Ευχαριστίες

Η διατριβή αυτή δεν είναι αποκλειστικά και μόνο έργο δικό μου. Πολλοί άνθρωποι συνέβαλαν, άμεσα ή έμμεσα, στην πραγματοποίηση και στη συγγραφή της. Θεωρώ χρέος μου μέσα από αυτές τις γραμμές να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς αυτούς τους ανθρώπους. Το ρήμα ευχαριστώ θα επαναληφθεί πολλές φορές στη συνέχεια κάνοντας το κείμενο που ακολουθεί λίγο μονότονο, αλλά είναι η μόνη λέξη που μπορεί να εκφράσει την ευγνωμοσύνη μου προς όλους όσους με βοήθησαν στην εκπόνηση της διατριβής μου.

Κατ' αρχήν ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Κοντόπουλο για τη συνεχή εποπτεία αυτής της εργασίας, την καθοδήγηση της έρευνας μου, τις γνώσεις που μου μετέδωσε, το χρόνο που μου διέθεσε απλόχερα για συζητήσεις, την εμπιστοσύνη και την εκτίμηση που έδειξε στο πρόσωπό μου και τη βοήθεια που μου παρείχε με κάθε δυνατό τρόπο. Το πάθος του για την έρευνα και η απαράμιλλη εργατικότητά του αποτέλεσαν σημείο αναφοράς της ερευνητικής μου δραστηριότητας.

Ευχαριστώ θερμά τον επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Χρόνη Πολυμίλη για την πολύτιμη βοήθεια του, την καθοδήγηση του, το χρόνο που μου διέθεσε για συζητήσεις θεμάτων της διατριβής μου, τις εύστοχες παρατηρήσεις και την εποικοδομητική κριτική του πάνω στην πορεία της έρευνας μου. Ο κ. Πολυμίλης είναι σε μεγάλο βαθμό "υπεύθυνος" γι' αυτήν την εργασία αφού αυτός πρώτος, στα φοιτητικά μου χρόνια, με έφερε σε επαφή με τον κόσμο των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Αναστάσιο Μπούντη για την παρακολούθηση της πορείας της έρευνάς μου, τις ωφέλιμες συζητήσεις που είχαμε γύρω από τα θέματα της διατριβής μου, τις χρήσιμες συμβουλές που μου έδωσε και τις πολύτιμες παρατηρήσεις του.

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή του Φυσικού και του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Milano κ. Antonio Giorgilli για την υπόδειξη του θέματος που μελετάμε στο τρίτο μέρος της διατριβής, την καθοδήγηση της έρευνας μου πάνω σ' αυτό το ζήτημα, το χρόνο που μου διέθεσε για συζητήσεις, τη βοήθεια του σε διάφορα υπολογιστικά προβλήματα, τις γνώσεις που μου παρείχε αλλά και τη φιλική, ανθρώπινη σχέση που είχαμε κατά τη διάρκεια των επισκέψεων μου στο Πανεπιστήμιο του Milano το φθινόπωρο του 1992 και το καλοκαίρι του 1995.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον καθηγητή του Χημικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. Σταύρο Φαράντο για τη βοήθεια του στη μελέτη του ζητήματος που αναπτύσσεται στο τέταρτο μέρος της διατριβής μου και τη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των επισκέψεων μου στο Πανεπιστήμιο Κρήτης το Δεκέμβριο του 1993 και τον Απρίλιο του 1994. Για τη συνεργασία του στη μελέτη του ίδιου ζητήματος και τη βοήθεια του σε διάφορα υπολογιστικά θέματα ευχαριστώ το λέκτορα του Χημικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης κ. Μανώλη Φουναργιωτάκη.

Ευχαριστώ ιδιαιτέρως τον καθηγητή του Φυσικού και του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Milano κ. Luigi Galgani για την θερμή φιλοξενία, τη βοήθεια του και την εκτίμηση που μου έδειξε κατά την διάρκεια της παραμονής μου στο Milano. Η παρουσία του έκανε την παραμονή μου μακριά από την πατρίδα ιδιαιτέρως ευχάριστη.

Ευχαριστώ τον καθηγητή του Τμήματος Αστρονομίας του Πανεπιστημίου της Φλωρεντίας κ. Claudio Chiuderi για την πολύτιμη βοήθεια του κατά τη διάρκεια της παραμονής μου στην Ιταλία το φθινόπωρο του 1992.

Ευχαριστώ το διευθυντή του Αστρονομικού Ινστιτούτου του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών κ. Ευάγγελο Κοντιζά και τον ερευνητή του ίδιου ιδρύματος κ. Πέτρο Ροβίθη για την πολύτιμη βοήθεια τους κατά τη διάρκεια της εργασίας μου στο ανωτέρω ίδρυμα ως έμμισθου μεταπτυχιακού υπότροφου το 1994.

Ευχαριστώ επίσης όλα τα μέλη του Τομέα Αστροφυσικής Αστρονομίας και Μηχανικής του Πανεπιστημίου Αθηνών για τη θερμή τους φιλοξενία.

Ευχαριστώ τους συναδέλφους Χρήστο Ευθυμιόπουλο και Ευαγγελία Γρουσουζάκου για την ανάγνωση του κειμένου και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου και τον αδελφό μου για την πολύτιμη συμπαράσταση τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου.

Θέλω επίσης να εκφράσω από αυτές τις γραμμές την ευγνωμοσύνη μου στη σύζυγο μου Ειρήνη, στην οποία και αφιερώνεται αυτή η εργασία, για την αμέριστη υποστήριξη της όλα αυτά τα χρόνια καθώς και για τη δακτυλογράφηση και επιμελή διόρθωση του κειμένου.

Χαράλαμπος Σκόκος

Δεκέμβριος 1996

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
Αντικείμενο της διατριβής.	1
ΜΕΡΟΣ Α ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ.	3
A.1 Δυναμικά συστήματα.	5
A.2 Μελέτη των περιοδικών τροχιών δυναμικών συστημάτων.	13
ΜΕΡΟΣ Β ΔΟΜΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΦΑΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΤΕΤΡΑΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ.	25
B.1 Εισαγωγή.	27
B.2 Μελέτη της διδιάστατης απεικόνισης.	30
B.3 Μελέτη των δομών που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων της τετραδιάστατης απεικόνισης.	35
B.3.1 Οι ζώνες συντονισμού στο επίπεδο x_1x_2 .	41
B.3.2 Προβολές στα διάφορα επίπεδα εκτός του επιπέδου x_1x_2 .	55
B.3.3 Μελέτη του εύρους των ζωνών συντονισμού στο επίπεδο x_1x_2 .	57
B.4 Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.	83
ΜΕΡΟΣ Γ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΉΛΙΟΥ - ΔΙΑ - ΑΣΤΕΡΟΕΙΔΗ.	89
Γ.1 Εισαγωγή.	91
Γ.2 Θεωρία Nekhoroshev.	96
Γ.3 Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος.	105
Γ.4 Κατασκευή της κανονικής μορφής της Χαμιλτονιανής.	111
Γ.5 Εύρεση της περιοχής πρακτικής ευστάθειας.	114
Γ.6 Αριθμητικά αποτελέσματα για το σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή.	121
Γ.7 Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.	132

ΜΕΡΟΣ Δ ΜΕΛΕΤΗ ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΧΗΜΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.	137
Δ.1 Εισαγωγή.	139
Δ.2 Χαμιλτονιανός φορμαλισμός στο σύστημα του κέντρου μάζας N σωματιδίων.	141
Δ.3 Το χημικό δυναμικό του FH ₂ και των ισοτοπικών του αναλόγων.	155
Δ.4 Η Χαμιλτονιανή του συστήματος FH ₂ και των ισοτοπικών του αναλόγων.	163
Δ.5 Μελέτη περιοδικών τροχιών του συστήματος FH ₂ και των ισοτοπικών του αναλόγων.	166
Δ.5.1 Η επιφάνεια τομής.	166
Δ.5.2 Περιοδικές τροχιές του δυναμικού συστήματος FH ₂ και των ισοτοπικών του αναλόγων.	170
Δ.5.3 Αριθμητική μελέτη των μη κανονικών περιοδικών τροχιών στο σύστημα του FH ₂ .	171
Δ.5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα για το σύστημα FD ₂ .	186
Δ.6 Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.	188
ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	191
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	193

Πρόλογος

Αντικείμενο της διατριβής

Η μελέτη μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τα οποία παρουσιάζουν πολύπλοκη συμπεριφορά, ξεκίνησε στα τέλη του προηγούμενου αιώνα από τον Poincaré, ο οποίος εξετάζοντας κυρίως Χαμιλτονιανά συστήματα που διαφέρουν λίγο από τα ολοκληρώσιμα συστήματα, έθεσε τις βάσεις για την ανάπτυξη της σύγχρονης θεωρίας διερεύνησης των δυναμικών συστημάτων. Η μελέτη του συνεχίστηκε από άλλους ερευνητές μεταξύ των οποίων εξέχουνσα θέση κατέχει ο Birkhoff. Στα τέλη της δεκαετίας του '50 η διατύπωση του θεωρήματος K.A.M. έδωσε σημαντική ώθηση στις μεθόδους διερεύνησης των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών συνέβαλε σημαντικά στη μελέτη αυτών των συστημάτων, αφού πλέον ήταν δυνατή η γρήγορη αριθμητική τους μελέτη. Στα χρόνια που ακολούθησαν, πλήθος ερευνητών ασχολήθηκε με τη μελέτη δυναμικών συστημάτων σε διάφορους τομείς της επιστήμης. Σήμερα μπορούμε να πούμε, ότι η συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας έχει γίνει κατανοητή σε πολύ μεγάλο βαθμό. Η γνώση μας όμως για συστήματα περισσοτέρων βαθμών ελευθερίας είναι σαφώς πιο περιορισμένη. Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί μεγάλη βαρύτητα στην αριθμητική αλλά και θεωρητική μελέτη Χαμιλτονιανών συστημάτων τριών βαθμών ελευθερίας και τετραδιάστατων συμπλεκτικών απεικονίσεων.

Ο στόχος της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη των δομών που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων ενός δυναμικού συστήματος τριών βαθμών ελευθερίας και η σύγκρισή τους με τους σχηματισμούς που εμφανίζουν συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας. Προσπαθούμε να δούμε τι και πώς μεταβάλλεται στη συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων, όταν από δύο βαθμούς ελευθερίας περάσουμε με ένα "συνεχή" τρόπο στους τρεις, μελετώντας αριθμητικά και αναλυτικά κάποια συγκεκριμένα δυναμικά συστήματα.

Εξετάζουμε δύο Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας, τα οποία εύκολα γενικεύονται στους τρεις βαθμούς ελευθερίας. Μελετάμε αυτά τα συστήματα αριθμητικά (μελέτη περιοδικών τροχιών) και αναλυτικά εφαρμόζοντας τη θεωρία του Nekhoroshev (εκτίμηση της περιοχής πρακτικής ευστάθειας). Οι πληροφορίες που παίρνουμε και οι τεχνικές που αναπτύσσουμε αποτελούν τη βάση για την κατανόηση της συμπεριφοράς των γενικότερων συστημάτων τριών βαθμών ελευθερίας. Συγκεκριμένα εξετάζουμε λεπτομερώς τον τρόπο δημιουργίας ορισμένων δομών, που εμφανίζονται στον τετραδιάστατο χώρο φάσεων μιας απεικόνισης, οι οποίες επηρεάζονται από τα χαρακτηριστικά του αντίστοιχου συστήματος δύο βαθμών ελευθερίας.

Το μέρος Α της διατριβής περιέχει μια γενική εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα. Εξετάζουμε κυρίως τα Χαμιλτονιανά αυτόνομα συστήματα και τις συμπλεκτικές απεικονίσεις. Ιδιαίτερη αναφορά κάνουμε στις δυναμικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά τέτοιων συστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι περιοδικές τροχιές και τα είδη ευστάθειάς τους.

Στο μέρος Β εξετάζουμε τις δομές που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων μιας τετραδιάστατης συμπλεκτικής απεικόνισης, η οποία δημιουργείται από τη σύζευξη δύο διδιάστατων απεικονίσεων. Μεταβάλλοντας την τιμή της παραμέτρου σύζευξης περνάμε από ένα διδιάστατο σ' έναν τετραδιάστατο χώρο φάσεων. Εξετάζουμε με αυτόν τον τρόπο πως τα χαρακτηριστικά των διδιάστατων απεικονίσεων επιδρούν στην τοπολογία του τετραδιάστατου χώρου φάσεων. Η επίδραση αυτή είναι ισχυρή όταν η τιμή της παραμέτρου σύζευξης είναι σχετικά μικρή, όταν όμως η απεικόνιση γίνεται ισχυρά τετραδιάστατη η επίδραση των διδιάστατων απεικονίσεων είναι αμελητέα. Κατορθώσαμε επίσης να εκφράσουμε αυτήν την επίδραση μέσω απλών εμπειρικών νόμων.

Στο μέρος Γ εφαρμόζουμε τη θεωρία του Nekhoroshev στο επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, κάνοντας μια εφαρμογή στο σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή. Χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους και κάνοντας διάφορες αριθμητικές εκτιμήσεις κατορθώσαμε να εξασφαλίσουμε την πρακτική ευστάθεια τεσσάρων πραγματικών αστεροειδών. Αυτή η επιτυχία υπογραμμίζει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου που αναπτύσσουμε για τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός Χαμιλτονιανού συστήματος στην περιοχή ενός σημείου ευσταθούς ισορροπίας. Η μέθοδος είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα τριών ή περισσοτέρων βαθμών ελευθερίας. Η εφαρμογή της σ' ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας έγινε κυρίως για να ελεγθεί η αποτελεσματικότητα της σ' ένα όσο το δυνατόν πιο απλό σύστημα.

Τέλος στο μέρος Δ μελετάμε αριθμητικά τις μη κανονικές περιοδικές τροχιές ενός Χαμιλτονιανού συστήματος, το οποίο περιγράφει τη χημική αλληλεπίδραση υδρογόνου και φθορίου. Αυτές οι περιοδικές τροχιές παρουσιάζουν κάποιες μορφολογικές ομοιότητες, οι οποίες αντανακλώνται σε μερικούς απλούς εμπειρικούς νόμους, που μας επιτρέπουν την επιτυχή πρόβλεψη των αρχικών συνθηκών νέων μη κανονικών περιοδικών τροχιών. Παρότι το δυναμικό σύστημα έχει γενικά τρεις βαθμούς ελευθερίας, εμείς εξετάζουμε ένα περιορισμένο πρόβλημα (γραμμική διάταξη των ατόμων), στο οποίο είναι ενεργοί μόνο οι δύο βαθμοί ελευθερίας.

Μέρος Α

Γενική εισαγωγή

4 Mέρος Α

A.1. Δυναμικά συστήματα.

Δυναμικό σύστημα ονομάζεται οποιοδήποτε φυσικό σύστημα, η κατάσταση του οποίου καθορίζεται κάθε χρονική στιγμή από τις τιμές N μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_N και η εξέλιξη του στο χρόνο δίνεται από ένα σύστημα N διαφορικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_N, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_N}{dt} &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N, t) \end{aligned} \quad (\text{A.1.1}).$$

Οι N μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_N μπορούν να είναι οποιεσδήποτε φυσικές ποσότητες όπως θέσεις, ταχύτητες, γωνίες, θερμοκρασίες, κ.λ.π. . Αν οι συναρτήσεις f_i , $i=1,2,\dots,N$, δεν εξαρτώνται ρητά από το χρόνο t , το σύστημα ονομάζεται αυτόνομο.

Αν το σύστημα (A.1.1) μπορεί να λυθεί για δεδομένες αρχικές συνθήκες $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}$ για $t=t_0$, τότε οι μεταβλητές x_i , $i=1,2,\dots,N$ εκφράζονται ως συναρτήσεις του χρόνου t . Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα είναι ντετερμινιστικό αφού η μελλοντική κατάσταση στην οποία θα βρεθεί, καθορίζεται πλήρως από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες. Για την πλειοψηφία των φυσικών συστημάτων οι αντίστοιχες εξισώσεις (A.1.1) είναι γενικά μη γραμμικές και δε μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Δηλαδή δε μπορούμε να γράψουμε τις μεταβλητές x_i , $i=1,2,\dots,N$, αναλυτικά ως συναρτήσεις του χρόνου για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t και οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0}$ των μεταβλητών. Σ' αυτές τις περιπτώσεις λύνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (A.1.1) αριθμητικά στον υπολογιστή.

Ο N -διάστατος χώρος με συντεταγμένες τις N μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_N ονομάζεται χώρος των φάσεων του δυναμικού συστήματος. Ένα σημείο του χώρου φάσεων αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη κατάσταση του δυναμικού συστήματος, οπότε η χρονική εξέλιξη του συστήματος αντιπροσωπεύεται από μια καμπύλη στο χώρο φάσεων.

Έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση $I(x_1, x_2, \dots, x_N)$ των μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_N (ή και του χρόνου t) η οποία παίρνει σταθερή τιμή κατά μήκος μιας τροχιάς του συστήματος, δηλαδή :

$$I(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) = I(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_N(t_0)) = c_0 \quad (\text{A.1.2}),$$

όπου c_0 πραγματική σταθερά η οποία εξαρτάται από τη συγκεκριμένη τροχιά στο χώρο των φάσεων. Τότε η συνάρτηση $I(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ονομάζεται ολοκλήρωμα του δυναμικού συστήματος. Η χρησιμότητα ενός ολοκληρώματος είναι μεγάλη, διότι λύνοντας την εξίσωση $I(x_1, x_2, \dots, x_N) = c_0$ ως προς μια μεταβλητή και αντικαθιστώντας την στις υπόλοιπες εξισώσεις του (A.1.1) μειώνουμε την τάξη του συστήματος σε $N-1$.

Μια ειδική κατηγορία δυναμικών συστημάτων είναι τα Χαμιλτονιανά συστήματα. Σ' αυτά τα συστήματα η διάσταση του χώρου φάσεων είναι πάντα ένας άρτιος αριθμός $2N$, όπου N οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. Οι μεταβλητές του συστήματος είναι οι γενικευμένες θέσεις q_1, q_2, \dots, q_N και οι γενικευμένες ορμές p_1, p_2, \dots, p_N . Οι θέσεις και οι ορμές είναι ανά δύο συζυγείς. Το σύστημα ορίζεται πλήρως από μια συνάρτηση των $2N$ μεταβλητών και εν γένει του χρόνου t :

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N, t) \quad (\text{A.1.3}),$$

η οποία ονομάζεται Χαμιλτονιανή. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων το οποίο καθορίζει τη χρονική εξέλιξη του δυναμικού συστήματος, δίνεται από τις κανονικές εξισώσεις του Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i=1,2,\dots,N \quad (\text{A.1.4}).$$

Αν η Χαμιλτονιανή (A.1.3) είναι ανεξάρτητη του χρόνου (οπότε το δυναμικό σύστημα ονομάζεται αυτόνομο), η συνάρτηση $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ είναι ολοκλήρωμα κατά μήκος όλων των τροχιών και επομένως μειώνει την τάξη του συστήματος (A.1.4) σε $2N-1$.

Αν η Χαμιλτονιανή (A.1.3) εξαρτάται ρητά από το χρόνο μπορούμε να ορίσουμε μια νέα Χαμιλτονιανή η οποία θα είναι χρονοανεξάρτητη και ισοδύναμη με την αρχική αφού θα περιγράφουν το ίδιο σύστημα. Αυτό γίνεται θεωρώντας ότι ο χρόνος t είναι μια επιπλέον ανεξάρτητη γενικευμένη συντεταγμένη, οπότε το σύστημα των εξισώσεων του Hamilton (A.1.4) συμπληρώνεται με τις εξισώσεις:

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{A.1.5}).$$

Ο χρόνος t και η αντίθετη τιμή της Χαμιλτονιανής $-H$, είναι συζυγείς μεταβλητές. Έτσι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (A.1.4) μαζί με τις εξισώσεις (A.1.5) είναι οι εξισώσεις Hamilton της νέας αυτόνομης Χαμιλτονιανής H^* η οποία ορίζεται ως εξής:

$$H^* = H(q_1, q_2, \dots, q_N, q_{N+1}, p_1, p_2, \dots, p_N) + p_{N+1} \quad (\text{A.1.6}),$$

όπου :

$$q_{N+1} = t, \quad p_{N+1} = -H \quad (\text{A.1.7}).$$

Χαρακτηριστική ιδιότητα της νέας Χαμιλτονιανής H^* είναι ότι η αριθμητική της τιμή ισούται πάντοτε με 0.

Το σύστημα (A.1.6) χαρακτηρίζεται πλέον ως ένα αυτόνομο σύστημα $N+1$ βαθμών ελευθερίας όπου η $N+1$ γενικευμένη συντεταγμένη είναι ο χρόνος. Έτσι, για παράδειγμα, ένα μη αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας είναι ισοδύναμο με ένα αυτόνομο σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας. Πολλές φορές στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως

"μισός" ο βαθμός ελευθερίας που εισάγει ο χρόνος, έτσι, το προηγούμενο σύστημα θα αναφερόταν ως σύστημα 2,5 βαθμών ελευθερίας. Επομένως όλα τα Χαμιλτονιανά συστήματα μπορούν να θεωρηθούν αυτόνομα γιατί όπως είδαμε, ακόμα και όταν δεν είναι ανεξάρτητα του χρόνου μπορούν να μετατραπούν σε αυτόνομα με αύξηση των βαθμών ελευθερίας. Άρα οι ιδιότητες μιας αυτόνομης Χαμιλτονιανής συνάρτησης H ισχύουν και για τη Χαμιλτονιανή H^* .

Μια συνάρτηση $I(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$, ανεξάρτητη της Χαμιλτονιανής συνάρτησης H , είναι ολοκλήρωμα του Χαμιλτονιανού συστήματος όταν η αγκύλη Poisson* της I και της H είναι μηδέν :

$$[H, I] = 0 \quad (\text{A.1.8}).$$

Όταν η αγκύλη Poisson δύο, ανεξάρτητων μεταξύ τους, ολοκληρωμάτων I_1, I_2 είναι ταυτοτικά 0 για όλες τις τιμές των γενικευμένων θέσεων και ορμών :

$$[I_1, I_2] = 0 \quad (\text{A.1.9}),$$

λέμε ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι σε ενέλιξη (involution).

Ένα Χαμιλτονιανό σύστημα μπορεί να έχει άπειρο πλήθος ολοκληρωμάτων, ένα πεπερασμένο όμως υποσύνολο αυτών είναι συναρτησιακά ανεξάρτητα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει κάθε αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα έχει ένα τουλάχιστον ολοκλήρωμα, την ίδια τη Χαμιλτονιανή. Αποδεικνύεται (π.χ. Ιχτιάρογλου 1990) ότι ένα Χαμιλτονιανό σύστημα N βαθμών ελευθερίας, το οποίο έχει N ανεξάρτητα ολοκληρώματα της κίνησης σε ενέλιξη μεταξύ τους μπορεί να επιλυθεί με απλές ολοκληρώσεις. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται ολοκληρώσιμο κατά Liouville ή απλά ολοκληρώσιμο. Επομένως ένα αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας είναι πάντα ολοκληρώσιμο, αφού η Χαμιλτονιανή του είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης.

Η χρονική εξέλιξη ενός Χαμιλτονιανού συστήματος αντιπροσωπεύεται από μια καμπύλη στο χώρο φάσεων, η οποία γενικά ονομάζεται τροχιά. Οι τροχιές στο χώρο φάσεων δεν τέμνονται. Αυτό οφείλεται στο ότι το σύστημα είναι ντετερμινιστικό, επομένως, κάθε δεδομένη αρχική συνθήκη καθορίζει μονοσήμαντα τη μελλοντική εξέλιξη του συστήματος. Έτσι αν δύο τροχιές τέμνονταν κάποια χρονική στιγμή θα είχαν τις ίδιες τιμές για τις μεταβλητές $q_i, p_i, i=1,2,\dots,N$, εκείνη τη χρονική στιγμή, οπότε και η μετέπειτα εξέλιξη τους θα ήταν ταυτόσημη.

Οπως είναι φανερό, κάθε σημείο του χώρου φάσεων αντιστοιχεί σ' ένα συγκεκριμένο φυσικό σύστημα οι αρχικές συνθήκες $q_{i0}, p_{i0}, i=1,2,\dots,N$, του οποίου είναι οι συντεταγμένες του σημείου. Μια κλειστή υπερεπιφάνεια C_0 στο χώρο φάσεων, η οποία περικλείει ένα σύνολο συστημάτων μια δεδομένη χρονική στιγμή t_0 , μετασχηματίζεται σε μια νέα κλειστή υπερεπιφάνεια C_1 τη χρονική στιγμή t_1 ($t_1 > t_0$), η οποία περικλείει το ίδιο σύνολο συστημάτων (Σχήμα A.1). Αυτό γίνεται αντιληπτό αν σκεφτούμε ότι, αν μια τροχιά με αρχική συνθήκη μέσα στην επιφάνεια, με την εξέλιξη του χρόνου έβγαινε έξω από αυτή θα έπρεπε κάποια στιγμή να την τμήσει. Αυτό όμως σύμφωνα με όσα αναφέραμε έχει ένα μόνο βαθμό ελευθερίας η παραπάνω υπερεπιφάνεια είναι μια κλειστή καμπύλη.

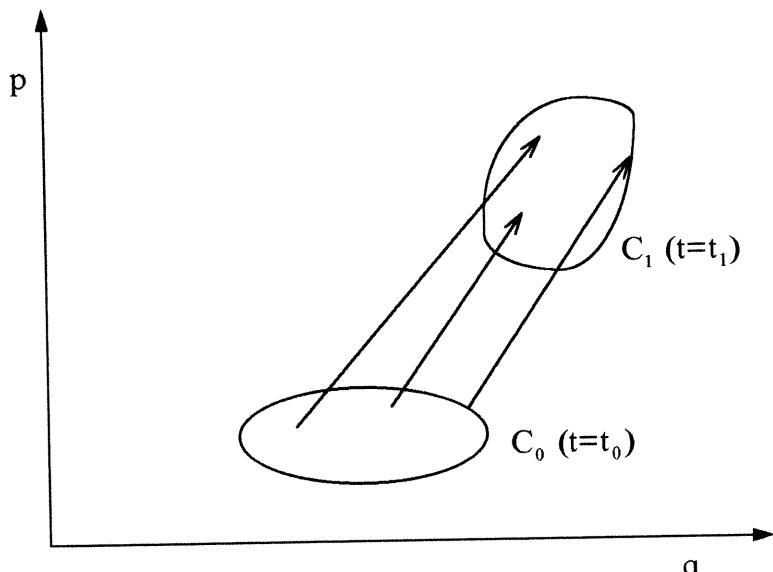
* Η αγκύλη Poisson δύο τυχαίων συναρτήσεων $f(q_i, p_i, t), g(q_i, p_i, t), i=1,2,\dots,N$, ορίζεται ως εξής :

$$[f, g] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Επομένως κανένα από τα σημεία τα οποία τη χρονική στιγμή t_0 ανήκουν στο σύνολο, δεν είναι δυνατό να διασχίσει την οριακή επιφάνεια και να βρεθεί έξω από το σύνολο, ενώ για τον ίδιο λόγο κανένα σημείο το οποίο αρχικά δεν ανήκε στο σύνολο δεν είναι δυνατό σε κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή, να βρεθεί στο εσωτερικό της οριακής επιφάνειας.

Αυτό σημαίνει ότι ο όγκος της περιοχής του χώρου φάσεων, η οποία κατέχεται από ένα σύνολο συστημάτων, παραμένει σταθερός όταν μεταβάλλεται ο χρόνος αν και αλλάζει το σχήμα και η θέση της περιοχής στον χώρο φάσεων. Αυτή η πρόταση αποτελεί τη διατύπωση του θεωρήματος Liouville.

Τα αυτόνομα Χαμιλτονιανά συστήματα ονομάζονται διατηρητικά (conservative) και σ' αυτά ισχύει το θεώρημα του Liouville. Τα μη αυτόνομα Χαμιλτονιανά συστήματα είναι μη διατηρητικά αφού η Χαμιλτονιανή δεν είναι ολοκλήρωμα της κίνησης. Σ' αυτά τα συστήματα ο όγκος στο χώρο φάσεων μπορεί να διατηρείται σταθερός όταν ο χρόνος μεταβάλλεται ή όχι. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αναλωτικά (dissipative) μη διατηρητικά συστήματα, στα οποία ο όγκος συνεχώς ελαττώνεται. Αυτά είναι τα μόνα μη διατηρητικά συστήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια και γι' αυτό θα αναφέρονται απλά ως μη διατηρητικά.



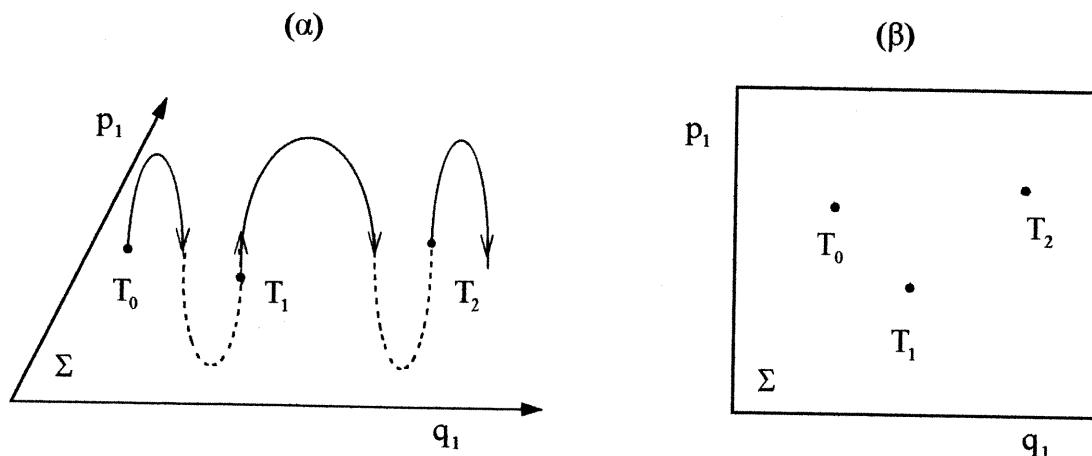
Σχήμα A.1: Κίνηση ενός συνόλου συστημάτων στο χώρο φάσεων ενός αυτόνομου Χαμιλτονιανού συστήματος, για το χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$.

Η κατανόηση της συμπεριφοράς των δυναμικών συστημάτων, διατηρητικών και μη, είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα και γι' αυτό έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφορες μέθοδοι μελέτης αυτών των συστημάτων. Μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους, η οποία χρησιμοποιείται κυρίως σε συστήματα με λίγους βαθμούς ελευθερίας, είναι η μελέτη των διαδοχικών τομών των τροχιών του συστήματος με την επιφάνεια τομής Poincaré (Poincaré surface of section, Poincaré 1892).

Για να εξηγήσουμε τη μέθοδο της επιφάνειας τομής ας θεωρήσουμε ένα αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας. Ο χώρος φάσεων αυτού του συστήματος είναι ένας χώρος τεσσάρων διαστάσεων με συντεταγμένες τις δύο γενικευμένες θέσεις q_1, q_2 , και τις δύο συζυγείς τους ορμές p_1, p_2 , ο οποίος δε μπορεί να απεικονισθεί. Με το q_1, q_2 , και τις δύο συζυγείς τους ορμές p_1, p_2 , ο οποίος δε μπορεί να απεικονισθεί. Με το ολοκλήρωμα της Χαμιλτονιανής $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ μπορούμε, όπως έχουμε αναφέρει, να ελαττώσουμε τις διαστάσεις του χώρου κατά μια, λύνοντας για παράδειγμα ως προς p_2 τη σχέση $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h$, οπότε έχουμε :

$$p_2 = p_2(q_1, q_2, p_1) \quad (\text{A.1.10}).$$

Σημειώνουμε ότι h είναι η σταθερή αριθμητική τιμή της Χαμιλτονιανής, η οποία υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες μιας τροχιάς. Επομένως η κίνηση, για μια δεδομένη τιμή της σταθεράς h , γίνεται πλέον σ' ένα χώρο τριών διαστάσεων (q_1, q_2, p_1) . Έστω τώρα ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διδιάστατη αναλυτική επιφάνεια Σ , μέσα σ' αυτόν το χώρο (π.χ. $q_2 = A =$ σταθερά), ώστε οι τροχιές του συστήματος να τέμνουν την επιφάνεια αυτή τουλάχιστον μια φορά εντός ενός ορισμένου χρονικού διαστήματος, αρκούντως μεγάλου, και πάντοτε με την ίδια φορά (π.χ. $\dot{q}_2 > 0$). Αυτή η επιφάνεια ονομάζεται επιφάνεια τομής Poincaré. Σημειώνουμε εδώ ότι γενικά δεν είναι δυνατόν να βρούμε μια επιφάνεια η οποία να τέμνει όλες τις τροχιές του συστήματος μας, οπότε σε κάθε περίπτωση προσπαθούμε, ανάλογα με τις συμμετρίες του συστήματος που εξετάζουμε, η επιφάνεια τομής να τέμνει όσο το δυνατόν περισσότερες τροχιές. Επομένως έχουμε περιορίσει τη μελέτη του Χαμιλτονιανού συστήματος στην εξέταση των διαδοχικών τομών των τροχιών με το επίπεδο q_1, p_1 όταν αυτές τέμνουν την επιφάνεια $q_2 = A$ με μια δεδομένη φορά ($\dot{q}_2 > 0$), όπως φαίνεται στο σχήμα A.2.



Σχήμα A.2 : (α) Τομές μιας τροχιάς με την επιφάνεια Poincaré Σ (επίπεδο q_1, p_1) σ' ένα αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας. (β) Τα σημεία τομής της τροχιάς πάνω στο επίπεδο q_1, p_1 .

Σημειώνουμε ότι η συγκεκριμένη επιφάνεια τομής, δηλαδή το επίπεδο q_1, p_1 , το οποίο ορίζεται από δύο συζυγείς μεταβλητές, είναι ένας ανηγμένος χώρος φάσεων του αρχικού Χαμιλτονιανού συστήματος (reduced phase space). Αποδεικνύεται (π.χ. Lichtenberg & Lieberman 1983) ότι το εμβαδόν που ορίζεται από μια κλειστή καμπύλη πάνω στην επιφάνεια τομής, διατηρείται καθώς ο χρόνος εξελίσσεται. Δηλαδή η διατήρηση όγκων που ισχύει στη γενική περίπτωση για όλο το χώρο φάσεων (θεώρημα Liouville), ισχύει και για την επιφάνεια τομής Poincaré αν αυτή έχει ως συντεταγμένες συζυγείς μεταβλητές.

Αν πέρα από τη Χαμιλτονιανή υπάρχει ένα ακόμα ολοκλήρωμα της κίνησης :

$$I(q_1, q_2, p_1, p_2) = c = \text{σταθερά} \quad (\text{A.1.11}),$$

τότε χρησιμοποιώντας τις (A.1.10) και (A.1.11) έχουμε :

$$p_1 = p_1(q_1, q_2) \quad (\text{A.1.12}).$$

Επομένως τα σημεία των διαδοχικών τομών των τροχιών με την επιφάνεια τομής θα βρίσκονται πάνω στην καμπύλη που δίνεται απ' τη σχέση (A.1.12) με $q_2 = A$. Αυτή η παρατήρηση έχει πολύ χρήσιμες πρακτικές συνέπειες. Στην πραγματικότητα για ένα Χαμιλτονιανό σύστημα βρίσκουμε με αριθμητικό υπολογισμό τα διαδοχικά σημεία τομής των διαφόρων τροχιών με την επιφάνεια τομής. Αν αυτά τα σημεία δημιουργούν ομαλές καμπύλες πάνω στην επιφάνεια τομής για κάθε αρχική συνθήκη, έχουμε μια ισχυρή ένδειξη ότι πιθανόν να υπάρχει και κάποιο ακόμα ολοκλήρωμα της κίνησης. Αν όμως στην επιφάνεια τομής συνυπάρχουν περιοχές στις οποίες σχηματίζονται ομαλές καμπύλες και περιοχές όπου τα διαδοχικά σημεία τομής φαίνεται να κατανέμονται ομοιόμορφα εκτελώντας μια ακανόνιστη κίνηση, το σύστημα δεν είναι ολοκληρώσιμο.

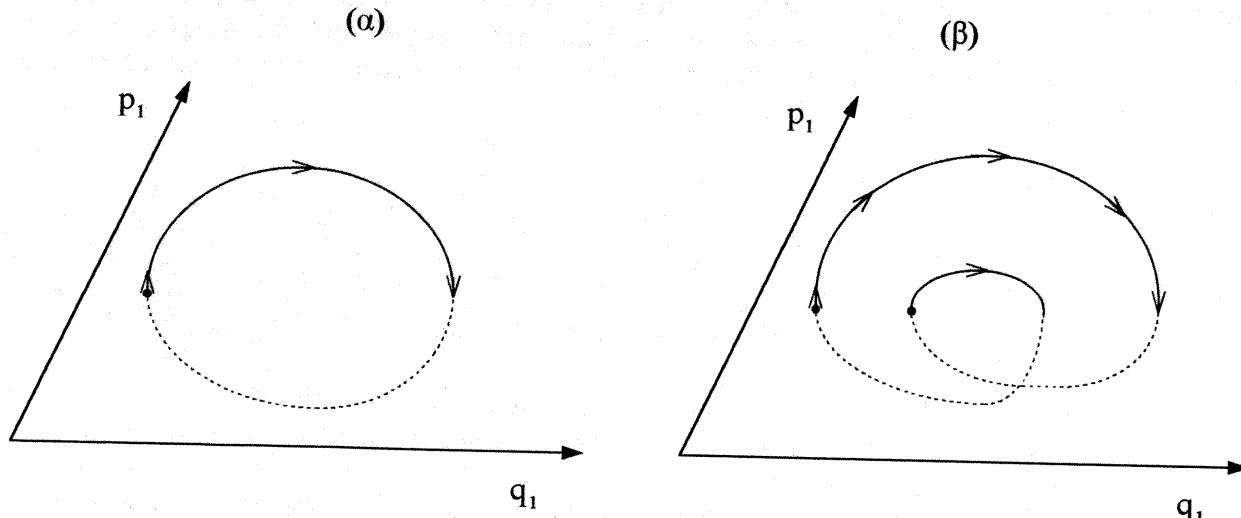
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων έχει η ύπαρξη ή όχι περιοδικών λύσεων των εξισώσεων κίνησης (A.1.4), οι οποίες ονομάζονται περιοδικές τροχιές. Γνωρίζοντας τις ιδιότητες αυτών των τροχιών (π.χ. ευστάθεια) μπορούμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος στις περιοχές του χώρου φάσεων γύρω από τις περιοδικές τροχιές.

Μια n -περιοδική τροχιά ($n \in \mathbb{N}^*$) κάνει η κύκλους πριν ξαναπεράσει από το αρχικό της σημείο και απεικονίζεται σε η σημεία στην επιφάνεια τομής (Σχήμα A.3). Η ευστάθεια των περιοδικών τροχιών θα μελετηθεί λεπτομερώς στην επόμενη παράγραφο, εδώ απλά θα αναφέρουμε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των ευσταθών και ασταθών περιοδικών τροχιών. Μια ευσταθής περιοδική τροχιά συγκεντρώνει γύρω της ένα σύνολο από ημιπεριοδικές τροχιές, η συμπεριφορά των οποίων είναι παρόμοια με αυτή της περιοδικής. Τα σημεία τομής των ημιπεριοδικών τροχιών με την επιφάνεια τομής Poincaré, σχηματίζουν ομαλές κλειστές καμπύλες γύρω από το σημείο της ευσταθούς περιοδικής τροχιάς. Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται αμετάβλητες καμπύλες. Σχηματίζονται έτσι "νησίδες" κανονικής ή οργανωμένης κίνησης στην επιφάνεια τομής. Σε μια ασταθή περιοδική τροχιά ενός ολοκληρώσιμου συστήματος αντιστοιχούν διπλά ασυμπτωτικές λύσεις, οι οποίες δημιουργούν τις λεγόμενες διαχωριστικές καμπύλες (separatrix). Οι καμπύλες αυτές διαχωρίζουν το χώρο φάσεων του συστήματος σε περιοχές στις οποίες η κίνηση είναι ποιοτικά διαφορετική (π.χ. ταλάντωση ή περιστροφή). Αντίθετα μια ασταθής τροχιά ενός μη ολοκληρώσιμου συστήματος, παράγει γύρω της ζώνες στοχαστικότητας. Τα διαδοχικά σημεία τομής των τροχιών γεμίζουν αυτές τις ζώνες και η κίνηση είναι ισχυρά ακανόνιστη ή όπως συχνά ονομάζεται χαοτική.

Είδαμε ότι στην επιφάνεια τομής ενός ολοκληρώσιμου Χαμιλτονιανού συστήματος 2 βαθμών ελευθερίας, υπάρχουν ομαλές καμπύλες και σημεία τα οποία αντιστοιχούν σε ευσταθείς και ασταθείς περιοδικές τροχιές. Αντίθετα όταν το σύστημα δεν είναι ολοκληρώσιμο υπάρχουν περιοχές στις οποίες η κίνηση είναι κανονική ή οργανωμένη και περιοχές όπου η κίνηση είναι στοχαστική. Η διαταραχή ενός ολοκληρώσιμου συστήματος έχει ως αποτέλεσμα την καταστροφή αρκετών αμετάβλητων καμπυλών και την εμφάνιση ζωνών στοχαστικότητας. Έχει αποδειχθεί όμως ότι αν η διαταραχή είναι αρκούντως μικρή, υπάρχουν αμετάβλητες καμπύλες που δεν καταστρέφονται, εξασφαλίζοντας έτσι την ύπαρξη περιοχών οργανωμένης κίνησης (Θεώρημα K.A.M. Kolmogorov 1954, Arnold 1963, Moser 1962). Για μικρές τιμές της διαταραχής, οι ζώνες στοχαστικότητας διαχωρίζονται από αμετάβλητες καμπύλες και η επικοινωνία τους είναι αδύνατη. Με την αύξηση όμως της διαταραχής οι αμετάβλητες καμπύλες τελικά καταστρέφονται με αποτέλεσμα οι ζώνες στοχαστικότητας να επικοινωνούν μεταξύ τους δημιουργώντας έτσι μεγάλες περιοχές χαοτικής κίνησης.

Σημειώνουμε ότι σ' ένα αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα με περισσότερους από 2 βαθμούς ελευθερίας, οι οργανωμένες τροχιές βρίσκονται πάνω σε αμετάβλητες πολυδιάστατες επιφάνειες (γενικευμένοι τόροι), οι οποίες πλέον δε διαχωρίζουν τις

στοχαστικές ζώνες. Αντίθετα οι περιοχές στοχαστικότητας επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω ενός πολύπλοκου συστήματος διόδων, ενός "ιστού" στοχαστικότητας (Arnold web). Αυτός επεκτείνεται σ' όλο το χώρο φάσεων οπότε μια τροχιά με αρχική συνθήκη σε μια οποιαδήποτε στοχαστική περιοχή θα κινηθεί τελικά μέσω του στοχαστικού ιστού και μπορεί να φτάσει σε περιοχές του χώρου φάσεων αρκετά μακριά απ' την αρχική της θέση. Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται διάχυση Arnold (Arnold diffusion, Arnold 1964). Πλήθος εργασιών αναφέρονται στη διάχυση Arnold, ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές : Chirikov 1979, Chirikov et al. 1979, Froeschlé 1971, Froeschlé & Scheidecker 1973b, Tennyson et al. 1979, Wood et al. 1990.



Σχήμα A.3 : Τομές περιοδικών τροχιών ενός αυτόνομου Χαμιλτονιανού συστήματος, με την επιφάνεια τομής Poincaré q_1, p_1 . (α) Περιοδική τροχιά περιόδου 1 και (β) περιοδική τροχιά περιόδου 2.

Θεωρώντας κάθε σημείο T_0 της επιφάνειας τομής Poincaré ως αρχική συνθήκη μιας τροχιάς του Χαμιλτονιανού συστήματος, βρίσκουμε τις διαδοχικές τομές αυτής της τροχιάς με την επιφάνεια τομής T_1, T_2, \dots (Σχήμα A.2). Ετσι καθορίζουμε μια απεικόνιση (map) G της επιφάνειας τομής στον εαυτό της ($G : \Sigma \rightarrow \Sigma$), αντιστοιχίζοντας κάθε σημείο T_0 αυτής, στο πρώτο σημείο τομής T_1 με την επιφάνεια, της τροχιάς με αρχική συνθήκη το T_0 ($G(T_0)=T_1$). Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται απεικόνιση Poincaré (Poincaré map). Τονίζουμε ότι γενικά δε μπορούμε να βρούμε την αναλυτική μορφή της απεικόνισης Poincaré για οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα. Συνήθως η απεικόνιση Poincaré βρίσκεται με αριθμητική λύση στον υπολογιστή, των διαφορικών εξισώσεων (A.1.4) και εύρεση των διαδοχικών τομών των τροχιών με την επιφάνεια Poincaré (Hénon 1982). Περισσότερα στοιχεία για αυτή τη διαδικασία αναφέρονται στην παράγραφο Δ.5.1.

Η έννοια της επιφάνειας τομής γενικεύεται και σε συστήματα με $N > 2$ βαθμούς ελευθερίας. Για κάθε χρονοανεξάρτητη Χαμιλτονιανή N βαθμών ελευθερίας ο χώρος φάσεων έχει διάσταση $2N$. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της Χαμιλτονιανής για να υπολογίσουμε μια γενικευμένη συντεταγμένη (την p_N για παράδειγμα), η κίνηση περιορίζεται σ' ένα χώρο $2N-1$ διαστάσεων. Όπως και στην ειδική περίπτωση $N=2$, την οποία εξετάσαμε προηγουμένως, θεωρούμε ως επιφάνεια τομής Poincaré την επιφάνεια διάστασης $2N-2$ $q_N =$ σταθερά, με συντεταγμένες $q_1, q_2, \dots, q_{N-1}, p_1, p_2, \dots, p_{N-1}$. Σ' αυτήν την επιφάνεια τομής ισχύει η διατήρηση των όγκων, αφού αποτελεί έναν ανηγμένο χώρο

φάσεων του αρχικού προβλήματος. Σ' αυτήν την περίπτωση η απεικόνιση Poincaré έχει διάσταση $2N-2$.

Αν πέρα από τη Χαμιλτονιανή υπάρχουν και άλλα ολοκληρώματα της κίνησης τότε οι διαδοχικές τομές των τροχιών με την επιφάνεια τομής Poincaré θα βρίσκονται σε μια επιφάνεια με διάσταση μικρότερη από $2N-2$. Αν το Χαμιλτονιανό σύστημα είναι ολοκληρώσιμο κατά Liouville, τότε οι προβολές των σημείων τομής σ' όλα τα επίπεδα (p_i, q_i) , $i=1,2,\dots,N-1$, θα βρίσκονται πάνω σε ομαλές καμπύλες.

Είδαμε ότι η μελέτη της συμπεριφοράς ενός Χαμιλτονιανού δυναμικού συστήματος μπορεί να γίνει πάνω στην επιφάνεια τομής. Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνουμε να μειώσουμε τη διάσταση του χώρου στον οποίο εργαζόμαστε. Πολλές φορές αντί να ξεκινήσουμε από ένα δυναμικό σύστημα και να μελετήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που ισχύουν σ' αυτό (Σχέση A.1.1 ή A.1.4) και τις τομές των τροχιών με την επιφάνεια τομής, μελετάμε μια απεικόνιση, δηλαδή ένα σύστημα N (στη γενική περίπτωση) εξισώσεων διαφορών, στο οποίο ο χρόνος t είναι διακριτός :

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= f_1(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{N,t}) \\ x_{2,t+1} &= f_2(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{N,t}) \\ &\vdots \\ x_{N,t+1} &= f_N(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{N,t}) \end{aligned} \quad (\text{A.1.13}).$$

Αντές οι εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως η απεικόνιση Poincaré ενός δυναμικού συστήματος. Η μελέτη απεικονίσεων έχει τα εξής πλεονεκτήματα : α) η διάσταση του χώρου είναι μικρότερη από αυτή του χώρου φάσεων του αντίστοιχου δυναμικού συστήματος και β) εργαζόμαστε με εξισώσεις διαφορών αντί για διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες είναι σαφώς πιο απλές, οπότε οι χρόνοι αριθμητικού υπολογισμού των διαδοχικών σημείων της απεικόνισης μειώνονται πάρα πολύ.

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει μια απεικόνιση, η οποία αντιστοιχεί σε Χαμιλτονιανό δυναμικό σύστημα, έχει πάντα άρτιο πλήθος εξισώσεων. Συγκεκριμένα μια απεικόνιση $2N$ διαστάσεων αντιστοιχεί σε Χαμιλτονιανό σύστημα $N+1$ βαθμών ελευθερίας το οποίο έχει $(2N+2)$ -διάστατο χώρο φάσεων. Επίσης μια τέτοια απεικόνιση είναι συμπλεκτική, δηλαδή ο Ιακωβιανός πίνακας \underline{A} αυτής :

$$\underline{A} = \frac{\partial(x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, \dots, x_{2N,t+1})}{\partial(x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{2N,t})} \quad (\text{A.1.14}),$$

ικανοποιεί τη σχέση :

$$\underline{A}^T \cdot \underline{J} \cdot \underline{A} = \underline{J} \quad (\text{A.1.15}),$$

όπου το σύμβολο T δηλώνει τον ανάστροφο ενός πίνακα και :

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \underline{0}_N & \underline{I}_N \\ -\underline{I}_N & \underline{0}_N \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.16}),$$

όπου $\underline{0}_N$ ο μηδενικός πίνακας $N \times N$ και \underline{I}_N ο μοναδιαίος πίνακας $N \times N$. Επίσης για την ορίζουσα του \underline{A} ισχύει :

$$|\det \underline{\Delta}| = 1 \quad (\text{A.1.17}),$$

εκφράζοντας με αυτόν τον τρόπο τη διατήρηση των όγκων, στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως.

Τα μη διατηρητικά συστήματα (dissipative systems, Eckmann 1981, Eckmann & Ruelle 1985, Helleman 1980, Lichtenberg & Lieberman 1983, Ott 1981, Ruelle 1980, Shaw 1981) είναι αυτά στα οποία συμβαίνει συνεχώς συστολή οποιουδήποτε όγκου του χώρου φάσεων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κίνηση του συστήματος να περιορίζεται τελικά σε έναν υπόχωρο μικρότερης διάστασης, από τη διάσπαση του χώρου φάσεων, ο οποίος ονομάζεται ελκυστής (attractor). Οι ελκυστές μπορεί να είναι μεμονωμένα σταθερά σημεία (fixed points), περιοδικές τροχιές οι οποίες ονομάζονται και οριακοί κύκλοι (limit cycles) ή πολύπλοκες γεωμετρικές κατασκευές που ονομάζονται παράξενοι ελκυστές (strange attractors). Η κίνηση πάνω στους παράξενους ελκυστές είναι χαοτική, ενώ σε όλα τα άλλα είδη ελκυστών είναι οργανωμένη. Σε μονοδιάστατα μη διατηρητικά συστήματα, η εξέλιξη των οποίων περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση της μορφής $\dot{x} = f(x)$, οι ελκυστές μπορούν να είναι μόνο σταθερά σημεία, ενώ σε διδιάστατα συστήματα μπορούν να εμφανιστούν και οριακοί κύκλοι. Παράξενοι ελκυστές εμφανίζονται σε συστήματα διάστασης $N \geq 3$, δηλαδή σε δυναμικά συστήματα η εξέλιξη των οποίων περιγράφεται από ένα σύστημα τριών τουλάχιστον διαφορικών εξισώσεων της μορφής (A.1.1) στο χώρο φάσεων ή από μια απεικόνιση δύο τουλάχιστον εξισώσεων διαφορών της μορφής (A.1.13) στην επιφάνεια τομής Poincaré.

Οι παράξενοι ελκυστές έχουν πολύπλοκη γεωμετρική δομή και χαρακτηρίζονται από κλασματική διάσταση. Σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε έως σήμερα η κίνηση στους παράξενους ελκυστές χαρακτηρίζεται ως χαοτική, γιατί παρά το γεγονός ότι στο μη διατηρητικό σύστημα ο όγκος γενικά ελαττώνεται οι αποστάσεις δεν είναι απαραίτητο να μειώνονται προς όλες τις διευθύνσεις, με αποτέλεσμα τροχιές με πολύ κοντινές αρχικές συνθήκες να απομακρύνονται μεταξύ τους ώστε η απόσταση τους να αυξάνει εκθετικά με το χρόνο. Αυτή η ιδιότητα, η οποία πολλές φορές αναφέρεται ως "ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες", είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό της χαοτικής κίνησης. Παράξενοι ελκυστές μπορεί να εμφανιστούν σε απλά σχετικά δυναμικά συστήματα, τα οποία περιγράφονται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων (Lorenz 1963, Rössler 1976) ή από απλές απεικονίσεις (Hénon 1976).

A.2. Μελέτη των περιοδικών τροχιών δυναμικών συστημάτων.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στην ευστάθεια των περιοδικών τροχιών ενός αυτόνομου Χαμιλτονιανού συστήματος τριών βαθμών ελευθερίας, εξετάζοντας τα διάφορα είδη ευστάθειας και αστάθειας τα οποία παρουσιάζονται σε αυτά τα συστήματα, και πότε αυτά εμφανίζονται. Περισσότερες λεπτομέρειες της ανάλυσης που ακολουθεί δίνονται από τους Χατζηδημητρίου (1989), Broucke (1969), Contopoulos & Magnenat (1985). Η μελέτη που ακολουθεί είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί ανάλογα και σε συστήματα με οσουσδήποτε βαθμούς ελευθερίας.

Έστω λοιπόν ένα τρισδιάστατο Χαμιλτονιανό σύστημα, η Χαμιλτονιανή του οποίου δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο t :

$$H = H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \quad (\text{A.2.1}),$$

όπου q_1, q_2, q_3 οι γενικευμένες θέσεις και p_1, p_2, p_3 οι αντίστοιχες γενικευμένες ορμές. Οι κανονικές εξισώσεις του Hamilton, οι οποίες περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του συστήματος είναι :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = f_{i+3}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \end{aligned}, \quad i=1,2,3 \quad (\text{A.2.2}).$$

Εστω $\underline{x}(t)$ μια T-περιοδική λύση (τροχιά) του συστήματος (A.2.2) :

$$\underline{x}(t+T) = \underline{x}(t) \quad (\text{A.2.3}),$$

όπου :

$$\underline{x}(t) = (q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ p_1(t) \ p_2(t) \ p_3(t))^T \quad (\text{A.2.4}),$$

δηλαδή :

$$x_i = q_i(t), \quad x_{i+3} = p_i(t), \quad i=1,2,3 \quad (\text{A.2.5}).$$

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος στην περιοχή της T-περιοδικής λύσης (A.2.3), θεωρούμε μια γειτονική λύση της $\underline{x}(t)$ η οποία αντιστοιχεί στις διαταραγμένες αρχικές συνθήκες :

$$x'_i(0) = x_i(0) + \xi_i(0), \quad i=1,2,\dots,6 \quad (\text{A.2.6}).$$

Η νέα λύση εκφράζεται στη μορφή :

$$x'_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t), \quad i=1,2,\dots,6 \quad (\text{A.2.7}),$$

όπου $\xi_i(t)$ οι μεταποίσεις της γειτονικής λύσης ως προς την αρχική λύση, για την ίδια χρονική στιγμή t. Η γεωμετρική ερμηνεία των μεταβλητών ξ_i φαίνεται στο σχήμα A.4.

Εφόσον οι συναρτήσεις $x'_i(t)$ αποτελούν λύσεις του συστήματος (A.2.2) θα το επαληθεύουν, οπότε έχουμε :

$$\dot{x}_i + \dot{\xi}_i = f_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_6 + \xi_6), \quad i=1,2,\dots,6 \quad (\text{A.2.8}).$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor μέχρι και όρους πρώτης τάξης ως προς ξ_i παίρνουμε :

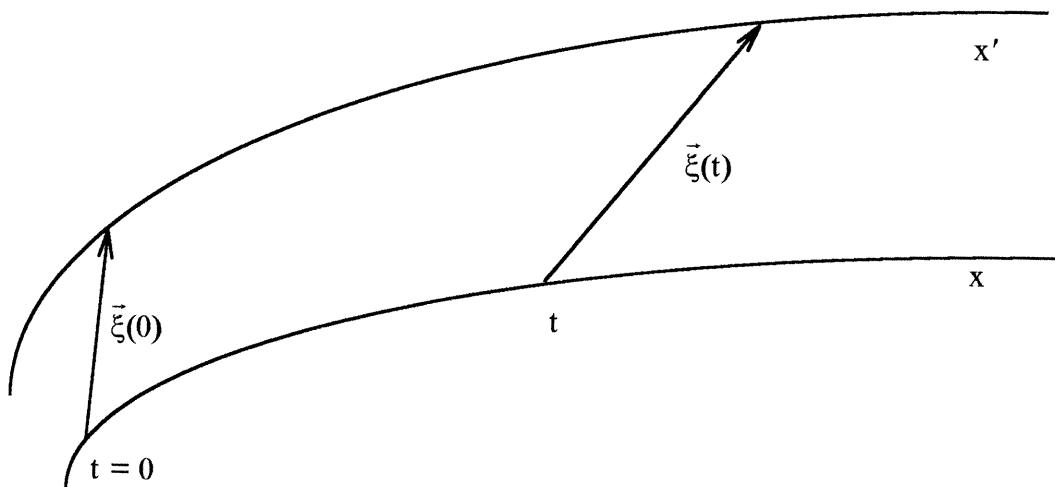
$$\dot{x}_i + \dot{\xi}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j, \quad i=1,2,\dots,6 \quad (\text{A.2.9}),$$

όπου οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1,2,\dots,6$, υπολογίζονται στο σημείο που ορίζεται από τις αρχικές συνθήκες της T-περιοδικής λύσης (A.2.3).

Η συνάρτηση $\underline{x}(t)$ ικανοποιεί το σύστημα (A.2.2) εφόσον είναι Τ-περιοδική λύση του, οπότε η (A.2.9) γίνεται :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi_j , \quad i=1,2,\dots,6 \quad (\text{A.2.10}).$$

Καταλήξαμε επομένως σ' ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ως προς ξ_i , οι συντελεστές $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1,2,\dots,6$, του οποίου, είναι Τ-περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου αφού υπολογίζονται για την Τ-περιοδική λύση $\underline{x}(t)$. Οι εξισώσεις (A.2.10) ονομάζονται εξισώσεις μεταβολών της περιοδικής λύσης (A.2.3).



Σχήμα A.4 : Δύο γειτονικές λύσεις x και x' του συστήματος (A.2.2) και οι εκτροπές τους $\vec{\xi}(0)$ και $\vec{\xi}(t)$ τις χρονικές στιγμές $t=0$ και t αντίστοιχα.

Ένας πίνακας $\underline{X}(t)$, τάξης 6×6 , οι στήλες του οποίου είναι 6 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (A.2.10) ονομάζεται θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε ως θεμελιώδη πίνακα λύσεων, τον πίνακα με στήλες τις λύσεις των εξισώσεων μεταβολών που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες $(1,0,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0,0)$, ..., $(0,0,0,0,0,1)$. Γι' αυτόν τον πίνακα θα ισχύει :

$$\underline{X}(0) = \underline{I}_6 \quad (\text{A.2.11}),$$

όπου \underline{I}_6 ο μοναδιαίος πίνακας 6×6 . Ο θεμελιώδης πίνακας των λύσεων για $t=T$ ονομάζεται μονόδρομος πίνακας \underline{M}' του συστήματος των εξισώσεων μεταβολών (A.2.10) :

$$\underline{M}' = \underline{X}(T) \quad (\text{A.2.12}).$$

Αποδεικνύεται (π.χ. Χατζηδημητρίου 1989) ότι ο μονόδρομος πίνακας \underline{M}' είναι ο Ιακωβιανός πίνακας :

$$\underline{M}' = \underline{X}(T) = \left. \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)}{\partial(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60})} \right|_{t=T} \quad (A.2.13),$$

όπου $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}$ οι αρχικές συνθήκες της T-περιοδικής λύσης (A.2.3). Ο πίνακας αυτός έχει τη συμπλεκτική ιδιότητα οπότε οι ιδιοτιμές του λ_i , $i=1,2,\dots,6$ διατάσσονται κατά αντίστροφα ζεύγη. Δύο από τις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα είναι πάντα ίσες με τη μονάδα.

Η λύση $\xi_i(t)$, $i=1,2,\dots,6$, των εξισώσεων (A.2.10) μας δίνει την εκτροπή της λύσης $\underline{x}'(t)$ ως προς την αρχική λύση $\underline{x}(t)$ σε όρους πρώτης τάξης ως προς την αρχική διαταραχή $\xi_i(0)$, $i=1,2,\dots,6$ (Σχέση A.2.6). Αν οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ είναι πεπερασμένες για $t \rightarrow \infty$ τότε η περιοδική λύση $\underline{x}(t)$ του συστήματος (A.2.2) ονομάζεται γραμμικά ευσταθής. Αν αντίθετα όταν $t \rightarrow \infty$ τα $\xi_i(t)$ απειρίζονται, οι δύο γειτονικές τροχιές απομακρύνονται μεταξύ τους, οπότε η περιοδική λύση ονομάζεται γραμμικά ασταθής. Σημειώνουμε εδώ ότι οι λύσεις $\xi_i(t)$ του συστήματος (A.2.10) μπορούν να τείνουν στο άπειρο αφού περιγράφουν την εκτροπή των δύο τροχιών σε μια πρώτη προσέγγιση, ενώ η πραγματική απόσταση των δύο γειτονικών τροχιών δεν είναι απαραίτητο να απειρίζεται. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί για παράδειγμα όταν η επιτρεπτή περιοχή κίνησης του συστήματος είναι μια κλειστή περιοχή του χώρου φάσεων.

Στην περίπτωση του συστήματος (A.2.2), επειδή οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα \underline{M}' διατάσσονται κατά αντίστροφα ζεύγη, έχουμε γραμμική ευστάθεια μόνο όταν όλες οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με μέτρο μονάδα, βρίσκονται δηλαδή πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και είναι απλές ή πολλαπλές με αριθμό ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων ίσο με την πολλαπλότητα τους. Σ' αυτήν την περίπτωση οι εκτροπές παραμένουν πεπερασμένες. Αντίθετα για κάθε ιδιοτιμή με μέτρο μικρότερο της μονάδας υπάρχει μια ιδιοτιμή με μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας στην οποία αντιστοιχεί εκτροπή η οποία απειρίζεται για $t \rightarrow \infty$, οπότε έχουμε γραμμική αστάθεια.

Οπως έχουμε ήδη αναφέρει ο μονόδρομος πίνακας \underline{M}' έχει δύο ιδιοτιμές ίσες με τη μονάδα. Αν σ' αυτήν τη διπλή ιδιοτιμή αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα το σύστημα είναι γραμμικά ευσταθές. Όταν όμως αντιστοιχεί μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα το σύστημα δεν είναι γραμμικά ευσταθές αλλά είναι τροχιακά ευσταθές. Μια περιοδική τροχιά λέγεται τροχιακά ευσταθής αν μια μικρή διαταραχή αυτής οδηγεί σε μια διαταραγμένη τροχιά, η οποία αν θεωρηθεί ως γεωμετρικό σχήμα στο χώρο φάσεων παραμένει κοντά στην περιοδική τροχιά, έτσι ώστε για κάθε χρονική στιγμή t υπάρχει μια άλλη χρονική στιγμή t^* τέτοια ώστε η εκτροπή $\xi_i^* = x'_i(t^*) - x_i(t)$, $i=1,2,\dots,6$ να είναι περατωμένη (Χατζηδημητρίου 1989).

Επομένως, για να προσδιορίσουμε το είδος της ευστάθειας μιας περιοδικής τροχιάς μας ενδιαφέρουν οι υπόλοιπες τέσσερις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα. Μελετώντας λοιπόν το δυναμικό σύστημα πάνω σε μια επιφάνεια τομής μπορούμε να κρατήσουμε μόνο τέσσερις από τις έξι γενικευμένες συντεταγμένες της Χαμιλτονιανής, οπότε έχουμε τέσσερις εξισώσεις μεταβολών και ένα μονόδρομο πίνακα $\underline{M} 4 \times 4$ με τέσσερις ιδιοτιμές οι οποίες διατάσσονται κατά αντίστροφα ζεύγη $\lambda_1, 1/\lambda_1, \lambda_2, 1/\lambda_2$. Αυτές οι ιδιοτιμές είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μονόδρομου πίνακα \underline{M} :

$$|\underline{M} - \lambda \underline{I}_4| = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0 \quad (A.2.14),$$

το οποίο γράφεται :

$$\left[\lambda^2 - \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \lambda + 1 \right] \cdot \left[\lambda^2 - \left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} \right) \lambda + 1 \right] = 0 \quad (\text{A.2.15}).$$

Θέτοντας :

$$b_1 = - \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right), \quad b_2 = - \left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} \right) \quad (\text{A.2.16}),$$

έχουμε :

$$(\lambda^2 + b_1 \lambda + 1)(\lambda^2 + b_2 \lambda + 1) = 0 \quad (\text{A.2.17}).$$

Τα b_1, b_2 ονομάζονται δείκτες ευστάθειας της περιοδικής τροχιάς και δίνονται συναρτήσει των συντελεστών α, β του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (A.2.14) από τις σχέσεις :

$$b_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{A.2.18}),$$

όπου :

$$\Delta = \alpha^2 - 4(\beta - 2). \quad (\text{A.2.19}).$$

Για τις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα έχουμε :

$$\lambda_i, \frac{1}{\lambda_i} = \frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4}}{2}, \quad i=1,2 \quad (\text{A.2.20}).$$

Οπότε για τα διάφορα είδη ευστάθειας έχουμε (Broucke 1969, Contopoulos & Magnenat 1985) :

1. Ευστάθεια (S) όταν $\Delta > 0$, $|b_1| < 2$ και $|b_2| < 2$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.
2. Απλή αστάθεια (SU) όταν $\Delta > 0$, $|b_1| < 2, |b_2| > 2$ ή $|b_1| > 2, |b_2| < 2$. Σ' αυτήν την περίπτωση οι δύο ιδιοτιμές είναι μιγαδικές και βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ενώ οι δύο άλλες είναι αντίστροφοι πραγματικοί αριθμοί.
3. Διπλή αστάθεια (DU) όταν $\Delta > 0$, $|b_1| > 2$ και $|b_2| > 2$, οπότε οι ιδιοτιμές είναι όλες πραγματικές.
4. Μιγαδική αστάθεια (Δ) όταν $\Delta < 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι όμως δε βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Δουλεύοντας με ανάλογο τρόπο σ' ένα αυτόνομο Χαμιλτονιανό σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας, με Χαμιλτονιανή :

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (\text{A.2.21}),$$

ο μονόδρομος πίνακας που αντιστοιχεί σε μια T-περιοδική τροχιά, θα δίνεται από τη σχέση :

$$\underline{\mathbf{M}}' = \left. \frac{\partial(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)}{\partial(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20}, \mathbf{x}_{30}, \mathbf{x}_{40})} \right|_{t=T} \quad (\text{A.2.22}),$$

σε αναλογία με τη σχέση (A.2.13). Επομένως οι δύο ιδιοτιμές που είναι διάφορες της μονάδας και μεταξύ τους αντίστροφες, θα είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του μονόδρομου πίνακα $\underline{\mathbf{M}}$:

$$|\underline{\mathbf{M}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}_2| = \lambda^2 - \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \lambda + 1 = \lambda^2 + b\lambda + 1 = 0 \quad (\text{A.2.23}),$$

όπου ο δείκτης ευστάθειας b της περιοδικής τροχιάς δίνεται από τη σχέση :

$$b = - \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) = - \operatorname{Tr} \underline{\mathbf{M}} \quad (\text{A.2.24}),$$

όπου $\operatorname{Tr} \underline{\mathbf{M}}$ το ίχνος του πίνακα $\underline{\mathbf{M}}$. Οπότε για τις ιδιοτιμές έχουμε :

$$\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2} \quad (\text{A.2.25}).$$

Επομένως τα είδη ευστάθειας που μπορούμε να έχουμε, είναι :

1. Ευστάθεια (S) όταν $|b| < 2$, οπότε οι δύο ιδιοτιμές είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.
2. Αστάθεια (U) όταν $|b| > 2$, οπότε οι δύο ιδιοτιμές είναι αντίστροφοι πραγματικοί αριθμοί.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια την ευστάθεια περιοδικών τροχιών σε συμπλεκτικές απεικονίσεις, οι οποίες όπως αναφέραμε αντιστοιχούν σε Χαμιλτονιανά συστήματα. Έστω λοιπόν μια τετραδιάστατη συμπλεκτική απεικόνιση T ώστε σε κάθε σημείο

$$\underline{x}_t = (x_{1,t} \ x_{2,t} \ x_{3,t} \ x_{4,t})^T$$

του τετραδιάστατου χώρου, αντιστοιχεί σημείο

$$\underline{x}_{t+1} = (x_{1,t+1} \ x_{2,t+1} \ x_{3,t+1} \ x_{4,t+1})^T,$$

ώστε :

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= f_1(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \\ x_{2,t+1} &= f_2(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \\ x_{3,t+1} &= f_3(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \\ x_{4,t+1} &= f_4(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \end{aligned} \quad (\text{A.2.26}),$$

ή πιο σύντομα :

$$\underline{x}_{t+1} = T(\underline{x}_t) \quad (\text{A.2.27}).$$

Μια περιοδική τροχιά περιόδου κ ($\kappa \in N^*$) αποτελείται από κ το πλήθος σημείων $\underline{x}_{o1}, \underline{x}_{o2}, \dots, \underline{x}_{o\kappa}$ αν ισχύει :

$$\underline{x}_{o2} = T(\underline{x}_{o1}), \underline{x}_{o3} = T(\underline{x}_{o2}), \dots, \underline{x}_{o1} = T(\underline{x}_{o\kappa}) \quad (A.2.28),$$

ή ισοδύναμα :

$$T^\kappa(\underline{x}_{oi}) = \underline{x}_{oi}, \quad i=1,2,\dots,\kappa \quad (A.2.29).$$

Για να βρούμε το είδος της γραμμικής ευστάθειας αυτής της τροχιάς θεωρούμε μια γειτονική τροχιά με αρχική συνθήκη :

$$\underline{x}'_{o1} = \underline{x}_{o1} + \underline{\xi}_{o1} \quad (A.2.30),$$

όπου :

$$\underline{\xi}_{o1} = (\xi_{1,o1} \ \xi_{2,o1} \ \xi_{3,o1} \ \xi_{4,o1})^T \quad (A.2.31)$$

οι μεταποίσεις της γειτονικής τροχιάς. Θέτοντας την (A.2.30) στην (A.2.27) και αναπτύσσοντας μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς $\xi_{i,o1}$, $i=1,2,3,4$ έχουμε την εξίσωση μεταβολών :

$$\underline{\xi}_{o2} = \underline{A}(\underline{x}_{o1}) \cdot \underline{\xi}_{o1} \quad (A.2.32),$$

όπου \underline{A} ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης :

$$\underline{A} = \frac{\partial(x_{1,t+1}, x_{2,t+1}, x_{3,t+1}, x_{4,t+1})}{\partial(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t})} \quad (A.2.33),$$

υπολογισμένος στο σημείο \underline{x}_{o1} . Αναλόγως θα ισχύει :

$$\underline{\xi}_{o3} = \underline{A}(\underline{x}_{o2}) \cdot \underline{\xi}_{o2}$$

κ.λ.π. οπότε, μετά από κ επαναλήψεις της απεικόνισης θα έχουμε :

$$\underline{\xi}'_{o1} \equiv \underline{\xi}_{o(\kappa+1)} = \underline{A}(\underline{x}_{o\kappa}) \cdot \underline{A}(\underline{x}_{o(\kappa-1)}) \cdot \dots \cdot \underline{A}(\underline{x}_{o2}) \cdot \underline{A}(\underline{x}_{o1}) \cdot \underline{\xi}_{o1} \quad (A.2.34),$$

η οποία μας δίνει την αλλαγή των αρχικών μεταποίσεων μετά από μια περίοδο, δηλαδή μετά από κ επαναλήψεις της απεικόνισης. Θέτοντας :

$$\underline{A}_i = \underline{A}(\underline{x}_{oi}), \quad i=1,2,\dots,\kappa \quad (A.2.35),$$

η (A.2.34) γίνεται :

$$\underline{\xi}'_{o1} = \underline{M}_1 \cdot \underline{\xi}_{o1} \quad (A.2.36),$$

όπου :

$$\underline{M}_1 = \underline{A}_k \cdot \underline{A}_{k-1} \cdot \dots \cdot \underline{A}_2 \cdot \underline{A}_1 \quad (\text{A.2.37}).$$

Το είδος των ιδιοτιμών του πίνακα \underline{M}_1 καθορίζουν το είδος της ευστάθειας του σημείου \underline{x}_{oi} , ακριβώς όπως και στην περίπτωση του Χαμιλτονιανού συστήματος 3 βαθμών ελευθερίας. Επομένως η τροχιά μπορεί να είναι ευσταθής (S) και απλά (SU), διπλά (DU) ή μιγαδικά (Δ) ασταθής.

Εξετάζοντας τη συμπεριφορά της απεικόνισης γύρω από ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο \underline{x}_{oi} , $i=1,2,\dots,k$, της περιοδικής τροχιάς περιόδου κ , καταλήγουμε στον πίνακα :

$$\underline{M}_i = \underline{A}_{i-1} \cdot \underline{A}_{i-2} \cdot \dots \cdot \underline{A}_1 \quad (\text{A.2.38}),$$

ο οποίος προκύπτει ως μια κυκλική μετάθεση των πινάκων \underline{A}_i , $i=1,2,\dots,k$, που εμφανίζονται στη σχέση (A.2.37). Για παράδειγμα έχουμε :

$$\underline{M}_2 = \underline{A}_1 \cdot \underline{A}_k \cdot \underline{A}_{k-1} \cdot \dots \cdot \underline{A}_3 \cdot \underline{A}_2 \quad (\text{A.2.39}).$$

Θα δείξουμε ότι όλοι οι πίνακες \underline{M}_i , $i=1,2,\dots,k$, έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, άρα το είδος της ευστάθειας των κ σημείων που αποτελούν την περιοδική τροχιά είναι το ίδιο για όλα τα σημεία της τροχιάς. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε αυτήν την ιδιότητα για τους πίνακες \underline{M}_1 και \underline{M}_2 , οπότε αναλόγως θα εργαστούμε και για τους υπόλοιπους πίνακες. Οι ιδιοτιμές λ_1 , λ_2 και τα ιδιοδιανύσματα \underline{x} , \underline{y} των πινάκων \underline{M}_1 και \underline{M}_2 , ορίζονται από τις σχέσεις :

$$\underline{M}_1 \cdot \underline{x} = \lambda_1 \underline{x} \quad (\text{A.2.40}),$$

$$\underline{M}_2 \cdot \underline{y} = \lambda_2 \underline{y} \quad (\text{A.2.41}).$$

Από τις (A.2.37) και (A.2.39) έχουμε :

$$\underline{M}_2 = \underline{A}_1 \cdot \underline{M}_1 \cdot \underline{A}_1^{-1} \quad (\text{A.2.42}),$$

οπότε η (A.2.41) μας δίνει :

$$\underline{A}_1 \cdot \underline{M}_1 \cdot \underline{A}_1^{-1} \cdot \underline{y} = \lambda_2 \underline{y} \Rightarrow \underline{M}_1 \cdot (\underline{A}_1^{-1} \cdot \underline{y}) = \lambda_2 (\underline{A}_1^{-1} \cdot \underline{y}) \quad (\text{A.2.43}),$$

η οποία ταυτίζεται με την (A.2.40) θέτοντας $\underline{y} = \underline{A}_1 \cdot \underline{x}$. Άρα οι πίνακες \underline{M}_1 και \underline{M}_2 έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές ($\lambda_1 = \lambda_2$), αλλά διαφορετικά εν γένει ιδιοδιανύσματα τα οποία συνδέονται με τη σχέση :

$$\underline{y} = \underline{A}_1 \cdot \underline{x} \quad (\text{A.2.44}).$$

Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε για την εύρεση του είδους της ευστάθειας μιας περιοδικής τροχιάς και σε απεικονίσεις με διάσταση διαφορετική του 4. Έτσι για παράδειγμα καταλαβαίνουμε ότι σε μια διδιάστατη συμπλεκτική απεικόνιση οι περιοδικές τροχιές είναι ευσταθείς (S) ή ασταθείς (U) σε αναλογία με τα Χαμιλτονιανά συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας.

Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες Liapunov παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων Χαμιλτονιανών και μη (Oseledec 1968, Benettin et al. 1976, 1980a, Pesin 1977). Οι εκθέτες Liapunov αποτελούν ένα μέτρο του βαθμού οργάνωσης ή στοχαστικότητας μιας τροχιάς όταν αυτή δεν είναι περιοδική. Θεωρούμε ένα γενικό δυναμικό σύστημα N δυναμικών μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_N , και δύο γειτονικές τροχιές με αρχικές συνθήκες

$$x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0),$$

για τη μια και

$$x_1(0)+\xi_1(0), x_2(0)+\xi_2(0), \dots, x_N(0)+\xi_N(0),$$

για την άλλη, όπου $\xi_i(0)$, $i=1,2,\dots,N$ οι αρχικές εκτροπές της μιας τροχιάς απ' την άλλη. Τότε το όριο :

$$\sigma(x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0), \xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \|\xi(0)\| \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\xi(t)\|}{\|\xi(0)\|} \right) \quad (\text{A.2.45}),$$

όπου το $\|\xi(t)\|$ δηλώνει το μέτρο του διανύσματος $(\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t))$, ονομάζεται χαρακτηριστικός εκθέτης Liapunov. Για δεδομένες αρχικές συνθήκες $x_i(0)$, $i=1,2,\dots,N$, και διάφορα $\xi_i(0)$, $i=1,2,\dots,N$, μπορούμε να έχουμε N διαφορετικές τιμές αυτού του ορίου. Γενικά μια τυχαία επιλογή των $\xi_i(0)$ μιας οδηγεί στον υπολογισμό του μέγιστου αριθμού Liapunov. Αυτός ο αριθμός αναφέρεται συχνά ως χαρακτηριστικός αριθμός Liapunov (Liapunov characteristic number, L.C.N.). Όταν αυτός ο αριθμός είναι θετικός έχουμε εκθετική απομάκρυνση των δύο γειτονικών τροχιών, το οποίο αποτελεί ένδειξη χαοτικής συμπεριφοράς. Στα Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα δύο χαρακτηριστικοί εκθέτες Liapunov είναι πάντα 0, ενώ οι υπόλοιποι διατάσσονται σε αντίθετα ζεύγη. Επομένως όταν η κίνηση δεν είναι χαοτική οι εκθέτες Liapunov είναι όλοι μηδέν, το οποίο εξασφαλίζεται όταν $L.C.N.=0$.

Όπως έχουμε αναφέρει η γνώση των βασικών τουλάχιστον περιοδικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος και το είδος της ευστάθειας τους, είναι απαραίτητη για την κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος. Γι' αυτόν τον λόγο, πλήθος εργασιών αναφέρονται στη μελέτη περιοδικών τροχιών σε δυναμικά συστήματα 2 (Barbanis 1985, 1986, Contopoulos 1965, 1968, 1970a, b, 1983a, b, Contopoulos & Papayannopoulos 1980, Contopoulos & Pinotsis 1984, Contopoulos & Zikides 1984, Dahlqvist & Russberg 1990, Farantos et al. 1989, Founargiotakis et al. 1989, Pinotsis 1986, 1987, 1988, Polymilis & Hizanidis 1993) και 3 (Contopoulos 1983c, 1984, 1985, 1986a, b, c, 1988, Contopoulos & Barbanis 1994, Contopoulos & Magnenat 1985, Contopoulos et al. 1994b, Hadjidemetriou 1975, Heggie 1985, Ichtiaroglou et al. 1989, Magnenat 1982a, b) βαθμών ελευθερίας, αλλά και σε απεικονίσεις 2 (Bountis 1981, Bountis & Helleman 1981, Greene et al. 1981, Hénon 1969) και 4 (Contopoulos & Giorgilli 1988, Janssen & Tjon 1983, Komineas et al. 1994, Mao et al. 1985, 1986, Mao & Helleman 1987, Pfenniger 1985, Vrahatis 1995) διαστάσεων.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των περιοδικών τροχιών καθώς μεταβάλλεται μια ή περισσότερες παράμετροι του συστήματος. Γενικά η αλλαγή της τιμής κάποιας παραμέτρου επιφέρει αλλαγή στις συντεταγμένες των περιοδικών τροχιών, αλλά και στο είδος της ευστάθειας τους. Αυτή η συμπεριφορά συνήθως σημειώνεται σε ένα

διάγραμμα, στο οποίο σχεδιάζουμε την τιμή μιας συντεταγμένης της περιοδικής τροχιάς συναρτήσει της παραμέτρου που μεταβάλλεται. Ένα τέτοιο διάγραμμα ονομάζεται διάγραμμα χαρακτηριστικών καμπυλών της περιοδικής τροχιάς (Barbanis 1985, 1986, Contopoulos 1970a, 1983a, b, 1985, Contopoulos & Papayannopoulos 1980, Contopoulos & Pinotsis 1984, Founargiotakis et al. 1989, Farantos et al. 1989).

Δυο άλλες ενδιαφέρουσες μορφές διαγραμμάτων που χρησιμοποιούνται κυρίως στη μελέτη Χαμιλτονιανών συστημάτων 3 βαθμών ελευθερίας ή τετραδιάστατων απεικονίσεων είναι τα διαγράμματα ευστάθειας και τα διαγράμματα ύπαρξης. Σ' ένα διάγραμμα ευστάθειας σχεδιάζουμε τους δείκτες ευστάθειας b_1 , b_2 (Σχέση A.2.16) μιας περιοδικής τροχιάς, συναρτήσει μιας παραμέτρου του συστήματος. Ένα διάγραμμα ύπαρξης είναι ένα διάγραμμα στο χώρο των παραμέτρων του συστήματος. Αν για παράδειγμα η συμπεριφορά ενός συστήματος χαρακτηρίζεται από τη μεταβολή δύο παραμέτρων τότε το αντίστοιχο διάγραμμα ύπαρξης είναι ένα επίπεδο με άξονες τις δύο παραμέτρους του συστήματος. Κάθε σημείο του διαγράμματος χαρακτηρίζεται από το είδος της ευστάθειας της περιοδικής τροχιάς που εξετάζουμε. Σ' αυτό το επίπεδο σημειώνουμε διάφορες καμπύλες στις οποίες γίνεται αλλαγή του είδους ευστάθειας της τροχιάς, οπότε σχηματίζονται περιοχές όπου η τροχιά έχει ένα συγκεκριμένο είδος ευστάθειας ή αστάθειας. Διαγράμματα ευστάθειας και ύπαρξης υπάρχουν σε πολλές εργασίες, ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές : Contopoulos 1985, 1986a, b, c, 1988, Contopoulos & Barbanis 1994, Contopoulos & Magnenat 1985, Contopoulos & Giorgilli 1988.

Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των περιοδικών τροχιών είναι οι διακλαδώσεις τις οποίες μπορούν να παρουσιάσουν, δηλαδή η δημιουργία νέων περιοδικών τροχιών από μια προϋπάρχουσα τροχιά, για κάποια τιμή μιας παραμέτρου του συστήματος. Συγκεκριμένα όταν από μια περιοδική τροχιά διακλαδίζεται μια νέα περιοδική τροχιά διπλάσιας περιόδου, ένας από τους δείκτες ευστάθειας της αρχικής τροχιάς είναι $b=2$. Στο διάγραμμα ευστάθειας όταν η καμπύλη ευστάθειας (που μας δίνει τη μεταβολή του δείκτη ευστάθειας b συναρτήσει της παραμέτρου του συστήματος) τμήσει τον άξονα $b=2$ δημιουργείται μια τροχιά με διπλάσια περίοδο, ενώ όταν τον ακουμπήσει εφαπτομενικά δημιουργούνται δύο περιοδικές τροχιές διπλάσιας περιόδου (Contopoulos 1986b). Όταν η καμπύλη ευστάθειας τμήσει τον άξονα $b=-2$ τότε δημιουργείται μια νέα τροχιά της ίδιας περιόδου με την αρχική, ενώ όταν τον ακουμπήσει εφαπτομενικά σχηματίζονται δύο νέες περιοδικές τροχιές της ίδιας περιόδου με την αρχική.

Μια οδός, η οποία οδηγεί σε χαοτική συμπεριφορά μεγάλης κλίμακας σ' ένα δυναμικό σύστημα, είναι μια σειρά από διακλαδώσεις περιοδικών τροχιών με διπλάσια περίοδο σε σχέση με την αρχική T , δηλαδή η δημιουργία τροχιών με περίοδο $2T$, $4T$, $8T$, ..., καθώς μεταβάλλεται μια παράμετρος του συστήματος. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ακολουθία απείρων διακλαδώσεων με διπλασιασμό περιόδου ή ακολουθία Feigenbaum και συμβαίνει σε διατηρητικά συστήματα μέχρι και 2 βαθμών ελευθερίας αλλά και σε μη διατηρητικά συστήματα. Σημειώνουμε ότι η διαδικασία διακλαδώσεων με διπλασιασμό περιόδου βρέθηκε για πρώτη φορά από τον Contopoulos (1970a, b). Η διαδικασία αυτή είναι παγκόσμια με την έννοια ότι χαρακτηρίζεται από κάποιες παραμέτρους, οι τιμές των οποίων είναι πάντα οι ίδιες ανεξαρτήτως του δυναμικού συστήματος για το οποίο υπολογίζονται. Οι παράμετροι αυτοί εξαρτώνται μόνο από το αν το σύστημα είναι διατηρητικό ή όχι. Για παράδειγμα, αν r_1, r_2, r_3, \dots οι τιμές μιας παραμέτρου του συστήματος για τις οποίες έχουμε διακλαδώσεις με διπλασιασμό περιόδου, δηλαδή γέννηση περιοδικών τροχιών με περιόδους $2T$, $4T$, $8T$, ... αντίστοιχα, η παγκόσμια παράμετρος σύγκλισης ή λόγος Feigenbaum :

$$\delta \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{r_{m-2} - r_{m-1}}{r_{m-1} - r_m}, \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 3 \quad (\text{A.2.46}),$$

έχει τιμή $\delta = 8,72\ldots$ για διατηρητικά συστήματα (Benettin et al. 1980b,c, Bountis 1981) και $\delta = 4,66\ldots$ για μη διατηρητικά συστήματα (Feigenbaum 1978, 1979). Το αν και με ποια μορφή συμβαίνει ανάλογη διαδικασία απείρων διακλαδώσεων διπλασιασμού περιόδου σε Χαμιλτονιανά συστήματα 3 βαθμών ελευθερίας ή σε συμπλεκτικές απεικονίσεις 4 διαστάσεων, είναι ένα ερώτημα το οποίο δεν έχει απαντηθεί πλήρως.

Μέρος Β

Δομές στο χώρο φάσεων μιας τετραδιάστατης
συμπλεκτικής απεικόνισης

B.1. Εισαγωγή.

Οι διδιάστατες συμπλεκτικές απεικονίσεις (2-D maps) ή ισοδύναμα τα Χαμιλτονιανά συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας αποτελούν το αντικείμενο μελέτης πλήθους ερευνητών εδώ και πάρα πολλά χρόνια, όπως για παράδειγμα : Barbanis 1984, Bensimon & Kadanoff 1984, Bountis & Helleman 1981, Contopoulos 1965, 1971, 1983a,b, 1990, Contopoulos & Kaufmann 1992, Contopoulos & Polymilis 1993, Contopoulos & Voglis 1997, Contopoulos et al. 1993, 1994a, 1995, Froeschlé 1970, Green 1978, Hénon & Heils 1964, Laskar et al. 1992, Magnenat 1979, Meiss 1992, Polymilis et al. 1997, Shenker & Kadanoff 1982, Voglis & Contopoulos 1994. Έτσι σήμερα η συμπεριφορά αυτών των συστημάτων έχει γίνει κατανοητή σε πολύ μεγάλο βαθμό. Η γνώση μας όμως για συστήματα περισσοτέρων διαστάσεων είναι σαφώς πιο περιορισμένη, αν και ήδη έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες μελέτης τέτοιων συστημάτων : Bountis & Tompaidis 1990, Contopoulos 1983c, 1984, 1986c, Contopoulos & Giorgilli 1988, Contopoulos et al. 1982, 1994b, Dorizzi et al. 1986, Ford & Lunsford 1970, Froeschlé 1972, Froeschlé & Scheidecker 1973a, Hadjidemetriou 1975, Heggie 1985, Martinet & Magnenat 1981, Pfenniger 1985, Polymilis 1991, Wood et al. 1990. Ένα από τα βασικότερα προβλήματα στη μελέτη συστημάτων τριών ή περισσοτέρων βαθμών ελευθερίας, είναι η δυσκολία απεικόνισης του χώρου φάσεων τέτοιων συστημάτων, αφού αυτός έχει διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του 4.

Το πρώτο βήμα στη μελέτη συστημάτων, ο χώρος φάσεων των οποίων είναι πολυδιάστατος, είναι η μελέτη Χαμιλτονιανών συστημάτων 3 βαθμών ελευθερίας ή τετραδιάστατων συμπλεκτικών απεικονίσεων. Η μελέτη τέτοιων συστημάτων έχει δείξει ότι εμφανίζονται σ' αυτά ένα πλήθος νέων φαινομένων, τα οποία δεν υπάρχουν στα συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας, όπως για παράδειγμα η μιγαδική αστάθεια (Contopoulos & Magnenat 1985, Contopoulos et al. 1994b, Heggie 1985, Pfenniger 1985) και η διάχυση Arnold.

Ιδιαίτερη βαρύτητα έχει δοθεί στη μελέτη απεικονίσεων 4 διαστάσεων (Bountis & Tompaidis 1990, Contopoulos & Giorgilli 1988, Froeschlé 1972, Froeschlé & Scheidecker 1973a, Mao & Helleman 1987, Mao et al. 1985, 1986, Pfenniger 1985, Wood et al. 1990), οι οποίες, όπως έχουμε αναφέρει, παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευκολία στους αριθμητικούς υπολογισμούς σε σχέση με τα Χαμιλτονιανά συστήματα. Έτσι γνωρίζουμε ότι στο χώρο φάσεων σχεδόν ολοκληρώσιμων τετραδιάστατων απεικονίσεων, δημιουργούνται αμετάβλητες επιφάνειες 2 διαστάσεων σύμφωνα με το θεώρημα K.A.M. . Όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο A.1, αυτές οι επιφάνειες δεν απομονώνουν τις ζώνες στοχαστικότητας που εμφανίζονται στο σύστημα και έτσι εμφανίζεται το φαινόμενο της διάχυσης Arnold. Επομένως η μελέτη των διαφόρων δομών, οι οποίες εμφανίζονται στο χώρο φάσεων αυτών των συστημάτων, είναι ένα ιδιαίτερως ενδιαφέρον πρόβλημα, διότι η γνώση αυτών των δομών θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά των συστημάτων τριών βαθμών ελευθερίας. Παρότι υπάρχουν αρκετά αριθμητικά και

αναλυτικά αποτελέσματα για συστήματα με τετραδιάστατο χώρο φάσεων (Froeschlé 1972, Contopoulos 1984, Bountis & Tompaidis 1990), οι δομές, οι οποίες εμφανίζονται σ' αυτά τα συστήματα δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως.

Επειδή γνωρίζουμε αρκετά καλά τη συμπεριφορά των διδιάστατων απεικονίσεων είναι φυσικό να εξετάσουμε μια τετραδιάστατη απεικόνιση, η οποία να σχετίζεται με τις ήδη γνωστές διδιάστατες απεικονίσεις. Γι' αυτό στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την αριθμητική μελέτη των δομών που παρουσιάζονται στο χώρο φάσεων μιας τετραδιάστατης συμπλεκτικής απεικόνισης, η μορφή της οποίας επιλέχθηκε έτσι ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε τις διάφορες δομές με ήδη γνωστούς σχηματισμούς, οι οποίοι εμφανίζονται σε διδιάστατες απεικονίσεις. Αντί λοιπόν να μελετήσουμε τις δομές του χώρου φάσεων μιας οποιασδήποτε τετραδιάστατης απεικόνισης, εξετάζουμε μια απεικόνιση, η οποία δημιουργείται από τη σύζευξη δύο ήδη γνωστών διδιάστατων απεικονίσεων. Έτσι όταν ο όρος σύζευξης μηδενίζεται για κάποια τιμή της παραμέτρου σύζευξης, η απεικόνιση αποτελείται πλέον από δύο ανεξάρτητες διδιάστατες απεικονίσεις, η συμπεριφορά των οποίων είναι γνωστή. Μεταβάλλοντας τώρα τον όρο σύζευξης η απεικόνιση γίνεται τετραδιάστατη και μπορούμε να δούμε αν οι δομές, οι οποίες σχηματίζονται στον τετραδιάστατο πλέον χώρο φάσεων, επηρεάζονται από τα χαρακτηριστικά των διδιάστατων απεικονίσεων. Με αυτόν τον τρόπο κάνουμε ένα πρώτο βήμα στη μελέτη τετραδιάστατων απεικονίσεων, έχοντας ως σημείο αναφοράς τη μορφολογία του χώρου φάσεων των διδιάστατων απεικονίσεων.

Η τετραδιάστατη συμπλεκτική απεικόνιση, την οποία μελετάμε είναι η :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 \\ x'_2 &= x_2 - v \cdot \sin(x_1 + x_2) - \mu \cdot [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)] \quad \text{mod}(2\pi) \\ x'_3 &= x_3 + x_4 \\ x'_4 &= x_4 - \kappa \cdot \sin(x_3 + x_4) - \mu \cdot [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)] \end{aligned} \quad (\text{B.1.1}).$$

Για όλες τις μεταβλητές έχουμε $\text{mod}(2\pi)$, οπότε $x_i \in [-\pi, \pi]$, $i=1,2,3,4$. Είναι φανερό ότι η απεικόνιση (B.1.1) δημιουργείται από τη σύζευξη δύο ίδιας μορφής διδιάστατων απεικονίσεων στα επίπεδα x_1x_2 και x_3x_4 , του τύπου :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 \\ x'_2 &= x_2 - v \cdot \sin(x_1 + x_2) \quad \text{mod}(2\pi) \end{aligned} \quad (\text{B.1.2}).$$

Ο όρος σύζευξης είναι :

$$\mu \cdot [1 - \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)] \quad (\text{B.1.3}),$$

όπου μ η παράμετρος σύζευξης. Από τη μορφή της απεικόνισης (B.1.1) παρατηρούμε ότι για $\mu=0$ η τετραδιάστατη απεικόνιση αποτελείται από δύο ανεξάρτητες διδιάστατες απεικονίσεις της μορφής (B.1.2) με παραμέτρους v στο επίπεδο x_1x_2 και κ στο επίπεδο x_3x_4 .

Η απεικόνιση (B.1.1) αποτελεί παραλλαγή της απεικόνισης :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + a_1 \cdot \sin(x_0 + y_0) + b \cdot \sin(x_0 + y_0 + z_0 + t_0) \\ y_1 &= y_0 \\ z_1 &= z_0 + a_2 \cdot \sin(z_0 + t_0) + b \cdot \sin(x_0 + y_0 + z_0 + t_0) \quad \text{mod}(2\pi) \\ t_1 &= t_0 \end{aligned} \quad (\text{B.1.4}),$$

η οποία μελετήθηκε από τους Froeschlé (1972), και Froeschlé & Scheidecker (1973a). Οι Contopoulos & Giorgilli (1988) μελέτησαν τις περιοδικές τροχιές της απεικόνισης (B.1.1) και τις διακλαδώσεις των τροχιών αυτών. Χρησιμοποίησαν ως όρο σύζευξης τον όρο $1 - \cos$ αντί του όρου \sin (Σχέση B.1.4), γιατί σ' αυτήν την περίπτωση η ευστάθεια της κεντρικής περιοδικής τροχιάς $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου μ . Επίσης είδαν ότι όλες οι ακολουθίες διακλαδώσεων περιοδικών τροχιών, οι οποίες ξεκινούν από τις απλές περιοδικές τροχιές του συστήματος διακόπτονται, είτε από την ύπαρξη περιοχών μιγαδικής αστάθειας, είτε από αντίστροφες διακλαδώσεις (inverse bifurcations), στις οποίες οι διακλαδιζόμενες περιοδικές τροχιές υπάρχουν για τιμές της παραμέτρου μικρότερες από την τιμή της παραμέτρου για την οποία εμφανίζεται η διακλάδωση (Contopoulos 1983c, Contopoulos & Magnenat 1985). Αντιθέτως στη διδιάστατη απεικόνιση (B.1.2) υπάρχουν ακολουθίες απείρων διακλαδώσεων με διπλασιασμό περιόδου (ακολουθία Feigenbaum).

Η απεικόνιση (B.1.1) είναι συμπλεκτική γιατί ο Ιακωβιανός της πίνακας :

$$\underline{A} = \frac{\partial(x'_1, x'_3, x'_2, x'_4)}{\partial(x_1, x_3, x_2, x_4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1+\alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \beta & 1+\gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1.5}),$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha &= -v \cdot \cos(x_1 + x_2) - \mu \cdot \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ \beta &= -\mu \cdot \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ \gamma &= -\kappa \cdot \cos(x_3 + x_4) - \mu \cdot \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

ικανοποιεί τη σχέση (A.1.15) :

$$\underline{A}^T \cdot \underline{J} \cdot \underline{A} = \underline{J}$$

όπου \underline{J} ο πίνακας που ορίζεται από τη σχέση (A.1.16).

Σημειώνουμε εδώ ότι η σειρά των μεταβλητών, ως προς τις οποίες υπολογίζεται ο Ιακωβιανός πίνακας (B.1.5) είναι x_1, x_3, x_2, x_4 και όχι x_1, x_2, x_3, x_4 . Αυτό συμβαίνει γιατί γράφουμε πρώτα τις μεταβλητές x_1, x_3 , οι οποίες έχουν την ίδια μορφή μεταξύ τους και στη συνέχεια τις μεταβλητές x_2, x_4 , οι οποίες έχουν πάλι την ίδια μορφή, όπως φαίνεται από την έκφραση της απεικόνισης (B.1.1).

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε λεπτομερώς τις δομές που δημιουργούν οι προβολές μη περιοδικών τροχιών της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1), σ' όλα τα δυνατά επίπεδα προβολής. Συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στον τρόπο κατασκευής αυτών των δομών και στην επίδραση των χαρακτηριστικών της διδιάστατης απεικόνισης (B.1.2) στη μορφολογία τους, καθώς αυξάνει η παράμετρος σύζευξης μ , δίνοντας μάλιστα και έναν εμπειρικό νόμο, ο οποίος περιγράφει αυτήν την επίδραση.

Αρχικά στην παράγραφο B.2 αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία από τη μελέτη της διδιάστατης απεικόνισης (B.1.2), τα οποία θα μας φανούν χρήσιμα στη μελέτη της τετραδιάστατης απεικόνισης στην παράγραφο B.3. Συγκεκριμένα στην παράγραφο B.3.1 περιγράφουμε μια πολύ ενδιαφέρουσα διαμόρφωση που παρουσιάζουν οι προβολές των σημείων στο επίπεδο $x_1 x_2$, η οποία επηρεάζεται από τους συντονισμούς της αντίστοιχης

διδιάστατης απεικόνισης. Εξετάζουμε τη δημιουργία σχεδόν παράλληλων ζωνών μέσα στις οποίες τα σημεία διατάσσονται πάνω σε ένα πλήθος περίπου παραβολικών καμπυλών. Μελετάμε επίσης τον τρόπο κατασκευής αυτών των καμπυλών και τη σχέση τους με τους διάφορους συντονισμούς. Στην παράγραφο B.3.2 αναφερόμαστε στις δομές που έχουμε σε όλα τα άλλα επίπεδα προβολής εκτός του επιπέδου x_1x_2 , δίνοντας έμφαση στις προβολές των τροχιών στο επίπεδο x_3x_4 , όπου η επίδραση των χαρακτηριστικών της διδιάστατης απεικόνισης είναι πάλι εμφανής. Στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 , x_2x_4 , οι προβολές δίνουν πολυπλοκότερες εικόνες αν και βρίσκουμε πάλι κάποιες κανονικότητες. Στην παράγραφο B.3.3 εξετάζουμε πως αλλάζουν οι παραπάνω δομές όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου σύζευξης μ , οπότε η τετραδιάστατη απεικόνιση απομακρύνεται από την οριακή κατάσταση, κατά την οποία αποτελείται από δύο διδιάστατες απεικονίσεις ($\mu=0$). Εκφράζουμε επίσης το εύρος των ζωνών συντονισμού στο επίπεδο x_1x_2 συναρτήσει της παραμέτρου σύζευξης μ μέσω ενός εμπειρικού νόμου. Τέλος στην παράγραφο B.4 συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα μας και παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα της μελέτης μας.

B.2. Μελέτη της διδιάστατης απεικόνισης.

Θα αναφέρουμε στη συνέχεια μερικά στοιχεία από τη μελέτη της διδιάστατης απεικόνισης (B.1.2) :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 \quad \text{mod}(2\pi) \\ x'_2 &= x_2 - v \cdot \sin(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (\text{B.2.1}),$$

γιατί η γνώση της συμπεριφοράς της, είναι χρήσιμη για τη μελέτη των δομών που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1). Για τις μεταβλητές x_1 , x_2 έχουμε $\text{mod}(2\pi)$, οπότε $x_1, x_2 \in [-\pi, \pi]$.

Παρατηρούμε ότι οι τροχιές με αρχικές συνθήκες :

$$\begin{aligned} x_{10} &= 0, \quad x_{20} = 0 \quad (\text{Τροχιά 1α}) \\ x_{10} &= -\pi, \quad x_{20} = 0 \quad (\text{Τροχιά 1β}) \end{aligned} \quad (\text{B.2.2}),$$

είναι περιοδικές τροχιές της απεικόνισης (B.2.1), περιόδου 1. Οπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο A.2 το είδος της ευστάθειας των περιοδικών τροχιών περιόδου 1 μιας απεικόνισης εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα \underline{M} των γραμμικοποιημένων εξισώσεων της απεικόνισης. Τα στοιχεία του πίνακα \underline{M} δίνονται από τη σχέση :

$$\mu_{ij} = \left. \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right|_0, \quad i,j=1,2 \quad (\text{B.2.3}),$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται για τις αρχικές συνθήκες της περιοδικής τροχιάς. Επομένως η γενική μορφή του πίνακα \underline{M} μετά την αντικατάσταση των αρχικών συνθηκών x_{10}, x_{20} είναι :

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -v \cdot \cos(x_{10} + x_{20}) & 1 - v \cdot \cos(x_{10} + x_{20}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2.4}).$$

Ο δείκτης ευστάθειας b μιας περιοδικής τροχιάς δίνεται από τη σχέση (A.2.24) :

$$b = -\operatorname{Tr}\underline{M} \quad (\text{B.2.5}),$$

όπου $\operatorname{Tr}\underline{M}$ το ίχνος του πίνακα \underline{M} . Από τις σχέσεις (B.2.2), (B.2.4) και (B.2.5) βρίσκουμε ότι ο δείκτης ευστάθειας b για την τροχιά 1a είναι :

$$b = v - 2 \quad (\text{B.2.6})$$

και για την περιοδική τροχιά 1β είναι :

$$b = -v - 2 \quad (\text{B.2.7}).$$

Σημειώνουμε ότι στη μελέτη μας δίνουμε στην παράμετρο v της απεικόνισης (B.2.1) μόνο θετικές τιμές. Επομένως σύμφωνα με όσα αναφέρουμε στην παράγραφο A.2 για τα είδη ευστάθειας των περιοδικών τροχιών διδιάστατων απεικονίσεων και από τις σχέσεις (B.2.6) και (B.2.7) καταλαβαίνουμε ότι η περιοδική τροχιά 1β είναι συνεχώς ασταθής, ενώ η 1a είναι ευσταθής για $v < 4$ και γίνεται ασταθής για $v > 4$.

Όταν έχουμε ευστάθεια ($|b| < 2$) ο δείκτης ευστάθειας μπορεί να γραφεί με την μορφή :

$$b = -2\cos\theta = -2\cos(2\pi \cdot \text{rot}) \quad (\text{B.2.8}).$$

Η γωνία θ ονομάζεται γωνία περιστροφής (rotation angle) και η ποσότητα rot αριθμός περιστροφής (rotation number). Όταν μεταβάλλεται η τιμή της παραμέτρου v της απεικόνισης (B.2.1), μεταβάλλεται και ο δείκτης ευστάθειας της περιοδικής τροχιάς 1a (Σχέση B.2.6), έτσι ώστε $|b| < 2$ όταν $0 < v < 4$. Όταν η τιμή του δείκτη ευστάθειας γίνει τέτοια, ώστε να αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό περιστροφής $\text{rot} = \frac{m}{n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$ και $m < n$, από την περιοδική τροχιά 1a διακλαδίζονται δύο περιοδικές τροχιές περιόδου n , μια ευσταθής και μια ασταθής, ενώ η 1a παραμένει ευσταθής. Τα n σημεία των δύο αυτών περιοδικών τροχιών διατάσσονται γύρω από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$, το οποίο αντιστοιχεί στην ευσταθή περιοδική τροχιά 1a, έτσι ώστε δύο διαδοχικά σημεία της μιας περιοδικής τροχιάς να έχουν ανάμεσά τους $m - 1$ σημεία της ίδιας τροχιάς, τα οποία η τροχιά θα επισκεφθεί σε μετέπειτα επαναλήψεις της απεικόνισης. Λόγω της μορφολογίας, την οποία περιγράψαμε, λέμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα συντονισμό (resonance) $\frac{m}{n}$. Σημειώνουμε ότι η τροχιά 1a γίνεται ασταθής, όταν διακλαδίζεται από αυτή για $v = 4$ μια περιοδική τροχιά περιόδου 2 με $\text{rot} = \frac{1}{2}$, οπότε και έχουμε τη γνωστή διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου. Στον πίνακα B.1 σημειώνουμε τις τιμές της παραμέτρου v για τις οποίες ορισμένοι συντονισμοί με αριθμό περιστροφής $\text{rot} = \frac{1}{n}$ διακλαδίζονται από την περιοδική τροχιά 1a.

Σημειώνουμε εδώ ότι μπορεί σε μερικές περιπτώσεις να παρατηρηθεί μια διαφορετική συμπεριφορά στη διαδικασία διακλάδωσης περιοδικών τροχιών όταν $n = 3$. Συγκεκριμένα τα σημεία των περιοδικών τροχιών περιόδου 3 εμφανίζονται σε κάποια απόσταση από την κεντρική περιοδική τροχιά ενώ η τιμή της παραμέτρου του συστήματος δεν αντιστοιχεί σε $\text{rot} = \frac{m}{3}$ (Contopoulos 1983b, Moser 1958, Polymilis et al. 1997).

n	b	v
2	2,0	4,0
3	1,0	3,0
4	0,0	2,0
5	-0,618034	1,381966
6	-1,0	1,0
7	-1,246980	0,753020
8	-1,414214	0,585786
9	-1,532089	0,467911
10	-1,618034	0,381966
19	-1,891634	0,108366
20	-1,902113	0,097887

Πίνακας B.1 : Οι τιμές της παραμέτρου ν της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1), για τις οποίες, περιοδικές τροχιές με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{n}$ διακλαδίζονται από την περιοδική τροχιά 1a. Δίνεται επίσης ο δείκτης ευστάθειας b της περιοδικής τροχιάς 1a σε κάθε περίπτωση.

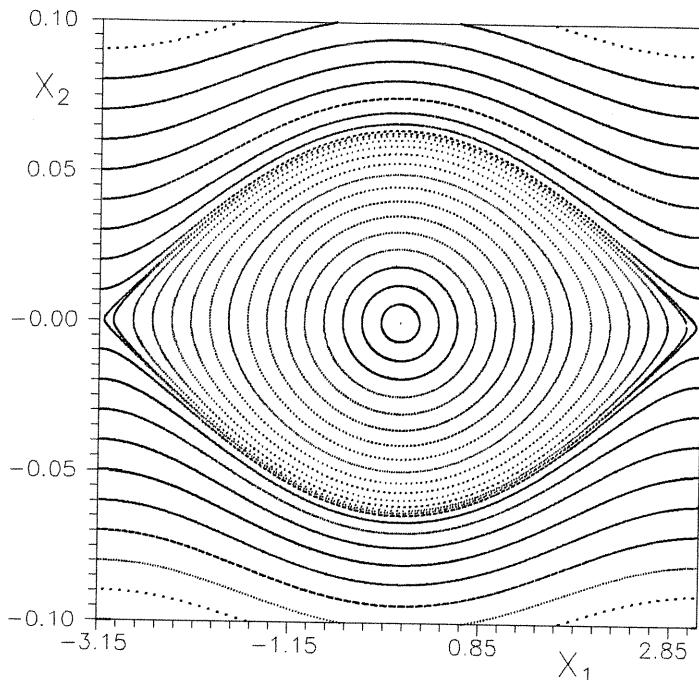
Θέτουμε αρχικά $v=0$, οπότε η απεικόνιση (B.2.1) αποτελείται από δύο ανεξάρτητες μονοδιάστατες απεικονίσεις, όπου η τιμή της μεταβλητής x_2 παραμένει συνεχώς σταθερή, ενώ στην τιμή της μεταβλητής x_1 προσθέτουμε συνεχώς τη σταθερή τιμή της x_2 . Όταν η σταθερή τιμή είναι :

$$x_2 = -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \quad m, n \in \mathbb{N}^* \text{ και } m \leq n \quad (\text{B.2.9}),$$

καταλαβαίνουμε ότι στο επίπεδο $x_1 x_2$ έχουμε η σημεία, τα οποία βρίσκονται πάνω στην οριζόντια ευθεία $x_2 = -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ και κάθε σημείο έχει μικρότερη τιμή στη συντεταγμένη x_1 από το προηγούμενο του, οπότε βρίσκεται αριστερότερα από αυτό στον άξονα $x_2 = -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$, εκτός από την περίπτωση όπου αυτή η κατάσταση ανατρέπεται λόγω της 2π-περιοδικότητας ($\pmod{2\pi}$) της συντεταγμένης x_1 . Δύο οποιαδήποτε διαδοχικά σημεία έχουν ανάμεσά τους $m-1$ σημεία ή με άλλα λόγια τα n σημεία διαγράφονται ανά m . Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι έχουμε ένα συντονισμό $\frac{m}{n}$. Επίσης, λόγω της 2π-περιοδικότητας ($\pmod{2\pi}$) της συντεταγμένης x_2 , έχουμε $x_2 < 0$ όταν $0 < \frac{m}{n} < \frac{1}{2}$ και $x_2 > 0$ όταν $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 1$. Όταν η τιμή του x_2 είναι τέτοια ώστε η ποσότητα $|x_2/2\pi|$ να ισούται με έναν άρρητο αριθμό a , τα διαδοχικά σημεία της απεικόνισης καλύπτουν πλήρως την ευθεία $x_2 = -2\pi \cdot a$. Επομένως η εικόνα της απεικόνισης (B.2.1) για $v=0$ στο επίπεδο $x_1 x_2$ αποτελείται από ευθείες παράλληλες στον οριζόντιο άξονα $x_2=0$ όταν $|x_2/2\pi| =$ άρρητος ή από οριζόντιες σειρές n σημείων, οι οποίες αντιστοιχούν στις τιμές (B.2.9) της μεταβλητής x_2 .

Δίνουμε στη συνέχεια στην παράμετρο ν μια μικρή τιμή διάφορη του μηδενός $v=10^{-3}$. Έτσι η απεικόνιση (B.2.1) είναι πλέον διδιάστατη και αποτελείται από δύο μονοδιάστατες απεικονίσεις ελαφρά συζευγμένες μεταξύ τους. Αυτή η μικρή σύζευξη δεν αλλάζει σημαντικά τη μορφή της απεικόνισης στο επίπεδο $x_1 x_2$ σε σχέση με την εικόνα που είχαμε προηγουμένως. Έτσι συνεχίζουν να υπάρχουν γραμμές σχεδόν παράλληλες προς τον άξονα x_1 . Η διαφοροποίηση εμφανίζεται στην κεντρική περιοχή γύρω από την

ευσταθή περιοδική τροχιά 1α, όπου σχηματίζονται κλειστές καμπύλες γύρω από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$ (Σχήμα B.1).



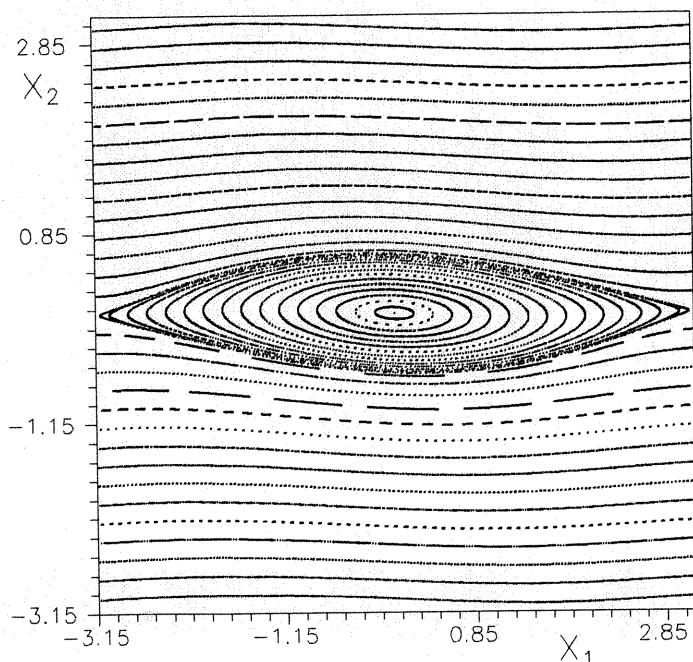
Σχήμα B.1 : Ο χώρος φάσεων της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) για $\nu=10^{-3}$ κοντά στην ευσταθή περιοδική τροχιά 1α. Τα σημεία δημιουργούν κλειστές καμπύλες γύρω από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$.

Στο σχήμα B.2 φαίνεται η μορφή της απεικόνισης (B.2.1) στο επίπεδο x_1x_2 για $\nu=10^{-1}$. Η κεντρική περιοχή, όπου εμφανίζονται κλειστές καμπύλες γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά 1α, έχει σαφώς μεγαλύτερη έκταση σε σχέση με την εικόνα για $\nu=10^{-3}$ (Σχήμα B.1), αφού τώρα η απεικόνιση είναι πλέον ισχυρά διδιάστατη. Παρ' όλα αυτά, έξω από την κεντρική περιοχή συνεχίζουν να υπάρχουν σχεδόν οριζόντιες καμπύλες διατηρώντας την ίδια περίπου μορφολογία που είχαμε για $\nu=0$. Εξετάζοντας προσεκτικά το σχήμα B.2, παρατηρούμε ότι η δεύτερη τροχιά από το κέντρο σχηματίζει 20 σημεία. Αυτό συμβαίνει γιατί στην περιοχή αυτή βρίσκεται η περιοδική τροχιά με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{20}$, η οποία διακλαδίστηκε από την τροχιά 1α για $\nu=0,097887$, όπως φαίνεται από τα στοιχεία του πίνακα B.1, τιμή η οποία είναι λίγο μικρότερη από την $\nu=10^{-1}$.

Εξετάσαμε τη διδιάστατη απεικόνιση (B.2.1) για $\nu=10^{-3}$ και $\nu=10^{-1}$ αναλυτικά, γιατί στη μελέτη της τετραδιάστατης απεικόνισης θα εξετάσουμε διεξοδικά τη σύζευξη των διδιάστατων απεικονίσεων των σχημάτων B.1 και B.2, αφού, αρχικά τουλάχιστον, θα θέσουμε $\nu=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$.

Στο σχήμα B.3 φαίνεται η αλλαγή της μορφής του χώρου φάσεων της απεικόνισης (B.2.1) καθώς η τιμή της παραμέτρου ν αυξάνει. Για $\nu=0,5$ (Σχήμα B.3a) οι κλειστές καμπύλες γύρω από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$ συνεχίζουν να υπάρχουν, δημιουργώντας μια νησίδα οργανωμένης κίνησης γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά 1α. Είναι επίσης εμφανής μια ζώνη στοχαστικότητας γύρω από αυτή τη νησίδα, η ύπαρξη της οποίας οφείλεται στην ασταθή περιοδική τροχιά 1β, η οποία βρίσκεται στο σημείο $x_1 = -\pi, x_2 = 0$. Υπάρχουν όμως στο επίπεδο x_1x_2 και άλλες νησίδες ευστάθειας μέσα σε ζώνες στοχαστικής ή χαοτικής κίνησης, υπάρχουν δηλαδή και άλλες περιοδικές τροχιές

ευσταθείς και ασταθείς. Οι διάφορες χαοτικές περιοχές δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, γιατί ανάμεσά τους υπάρχουν σχεδόν οριζόντιες αμετάβλητες καμπύλες, οι οποίες τις απομονώνουν. Για λίγο μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου $v=0,8$ (Σχήμα B.3β) βλέπουμε ότι η ίδια μορφολογία παραμένει, άλλα η δομή στο χώρο φάσεων είναι σαφώς πιο πλούσια, αφού υπάρχει ένα πλήθος νησίδων και χαοτικών ζωνών. Παρότι οι χαοτικές περιοχές καταλαμβάνουν μεγαλύτερη έκταση απ' ότι στην περίπτωση για $v=0,5$ (Σχήμα B.3α), συνεχίζουν να υπάρχουν αμετάβλητες καμπύλες, οι οποίες τις απομονώνουν. Αυτές οι αμετάβλητες καμπύλες έχουν καταστραφεί για $v=1,2$ (Σχήμα B.3γ), οπότε οι χαοτικές περιοχές επικοινωνούν πλέον μεταξύ τους, δημιουργώντας έτσι χάος μεγάλης έκτασης. Παρ' όλα αυτά συνεχίζουν να υπάρχουν αρκετές νησίδες οργανωμένης κίνησης πέρα από την κεντρική νησίδα.



Σχήμα B.2 : Ο χώρος φάσεων της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) για $v=10^{-1}$. Η περιοχή όπου σχηματίζονται κλειστές καμπύλες γύρω από την ευσταθή περιοδική τροχιά 1a στο σημείο $x_1=x_2=0$, είναι περισσότερο εκτεταμένη απ' ότι για $v=10^{-3}$ (Σχήμα B.1).

Μέσα στην κεντρική νησίδα μπορούμε να διακρίνουμε μια πλούσια δομή. Υπάρχουν περιοχές στις οποίες έχουν δημιουργηθεί νησίδες ευστάθειας μέσα σε ζώνες στοχαστικότητας. Αυτή η δομή οφείλεται στην ύπαρξη ευσταθών και ασταθών περιοδικών τροχιών, οι οποίες γεννήθηκαν από την κεντρική περιοδική τροχιά 1a. Συγκεκριμένα, στα όρια της κεντρικής νησίδας στο σχήμα B.3γ έχουν σχηματιστεί 8 νησίδες, οι οποίες αντιστοιχούν στην ευσταθή περιοδική τροχιά με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{8}$ που γεννήθηκε, σύμφωνα με τα στοιχεία του πίνακα B.1, από την κεντρική τροχιά για $v=0,585786$. Ανάλογα οι 6 νησίδες που βρίσκονται πιο κοντά στο σημείο $x_1=x_2=0$ αντιστοιχούν στην ευσταθή περιοδική τροχιά με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{6}$ η οποία γεννήθηκε για $v=1$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι καθώς η τιμή της παραμέτρου v αυξάνει γεννιούνται από την κεντρική περιοδική τροχιά 1a νέες περιοδικές τροχιές περιόδου (τάξης) μεγαλύτερης από 1, οι οποίες απομακρύνονται από το σημείο $x_1=x_2=0$. Έτσι βλέπουμε ότι η περιοδική τροχιά περιόδου 8 βρίσκεται μακρύτερα από την αρχή των αξόνων σε σχέση με την περιοδική τροχιά περιόδου 6, διότι γεννήθηκε για μικρότερη τιμή της παραμέτρου v .

Στη συνέχεια, επιπλέον αύξηση της τιμής της παραμέτρου ν έχει ως αποτέλεσμα αύξηση της έκτασης της χαοτικής περιοχής έξω από την κεντρική νησίδα, παρότι υπάρχουν ακόμα νησίδες ευστάθειας μέσα στη χαοτική "θάλασσα" για $v=1,5$ (Σχήμα B.3d). Για $v=1,5$ βλέπουμε ότι οι νησίδες της περιοδικής τροχιάς περιόδου 6 έχουν φτάσει στα όρια της κεντρικής νησίδας έχοντας απομακρυνθεί από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$ σε σχέση με το σχήμα B.3g.

Για $v=2$ (Σχήμα B.3e) και $v=3$ (Σχήμα B.3st) η κεντρική νησίδα περιορίζεται σε έκταση και στρέφεται παίρνοντας μια πιο όρθια θέση σε σχέση με αυτή που είχε για μικρότερες τιμές της παραμέτρου ν. Επίσης η χαοτική θάλασσα φαίνεται πιο ομογενής και οι όποιες νησίδες ευστάθειας υπάρχουν μέσα της είναι πολύ μικρές σε μέγεθος. Η ίδια κατάσταση ισχύει και για $v=4$ (Σχήμα B.3f).

Για $v < 4$ ο δείκτης ευστάθειας b της τροχιάς 1a (B.2.6) είναι μικρότερος του 2 ενώ για $v > 4$ έχουμε $b > 2$. Επομένως σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην παράγραφο A.2, καθώς η παράμετρος ν αυξάνει και ποιρνει τιμές μεγαλύτερες της τιμής 4 η περιοδική τροχιά 1a από ευσταθής γίνεται ασταθής, δημιουργώντας παράλληλα μια ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου 2. Έχουμε δηλαδή μια διακλάδωση με διπλασιασμό περιόδου. Ο δείκτης ευστάθειας της περιοδικής τροχιάς περιόδου 2 είναι ίσος με -2 τη στιγμή γέννησης της τροχιάς. Αν θεωρήσουμε ότι η περιοδική τροχιά 1a για $v < 4$ διαγράφεται δύο φορές, ώστε να θεωρείται καταχρηστικά περιόδου 2, θα έχει δείκτη ευστάθειας $b^{(2)}$ ο οποίος δίνεται από τη σχέση :

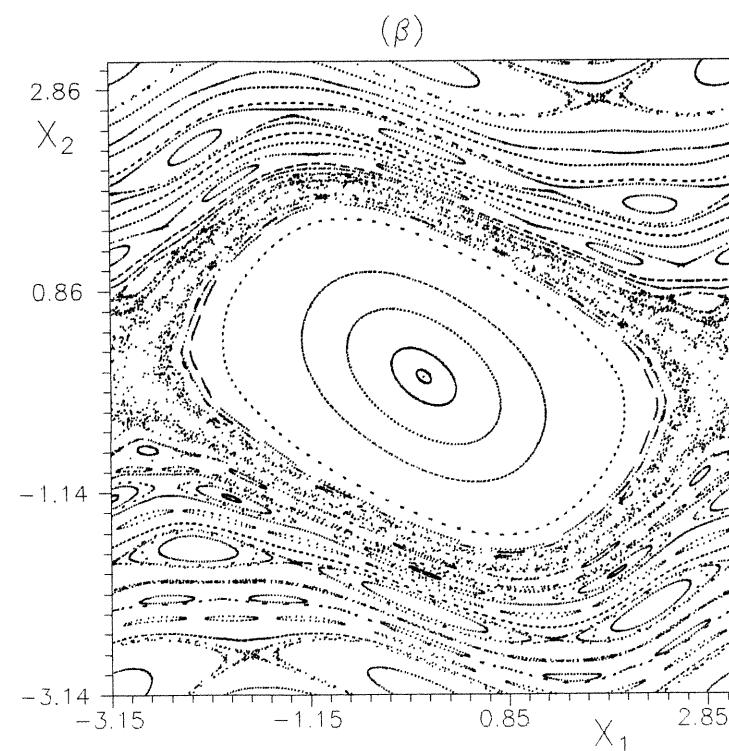
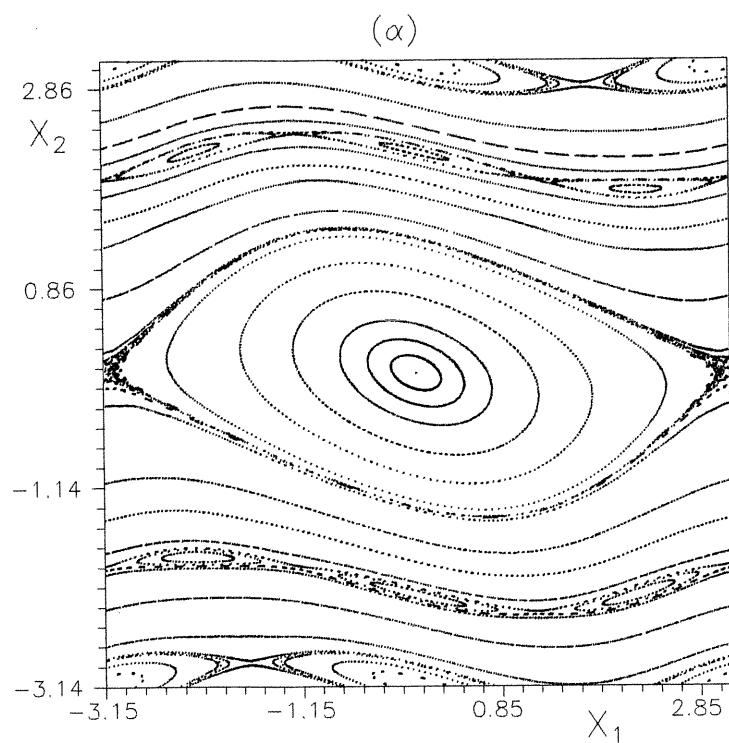
$$b^{(2)} = 2 - b^2 \quad (\text{B.2.10}),$$

όπου b ο δείκτης ευστάθειας της τροχιάς όταν θεωρείται περιόδου 1 (Contopoulos 1986b). Επομένως αφού για $v=4$ έχουμε $b=2$ από τη (B.2.10) παίρνουμε $b^{(2)} = -2$, η οποία είναι ακριβώς η τιμή του δείκτη ευστάθειας της νέας τροχιάς περιόδου 2 τη στιγμή της γέννησης της. Στο σχήμα B.3η, όπου έχουμε τη μορφή του χώρου φάσεων για $v=4,5$, βλέπουμε τις δύο νησίδες ευστάθειας που αντιστοιχούν στην ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου 2, η οποία γεννήθηκε από την τροχιά 1a για $v=4$. Η στοχαστική περιοχή, η οποία φαίνεται γύρω από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$, οφείλεται στην ύπαρξη της περιοδικής τροχιάς 1a, η οποία είναι πλέον ασταθής.

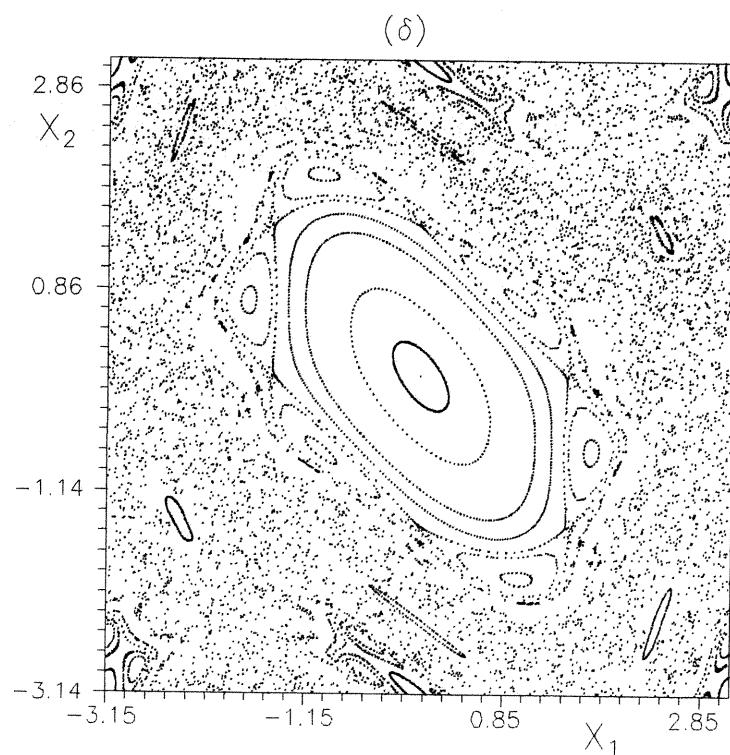
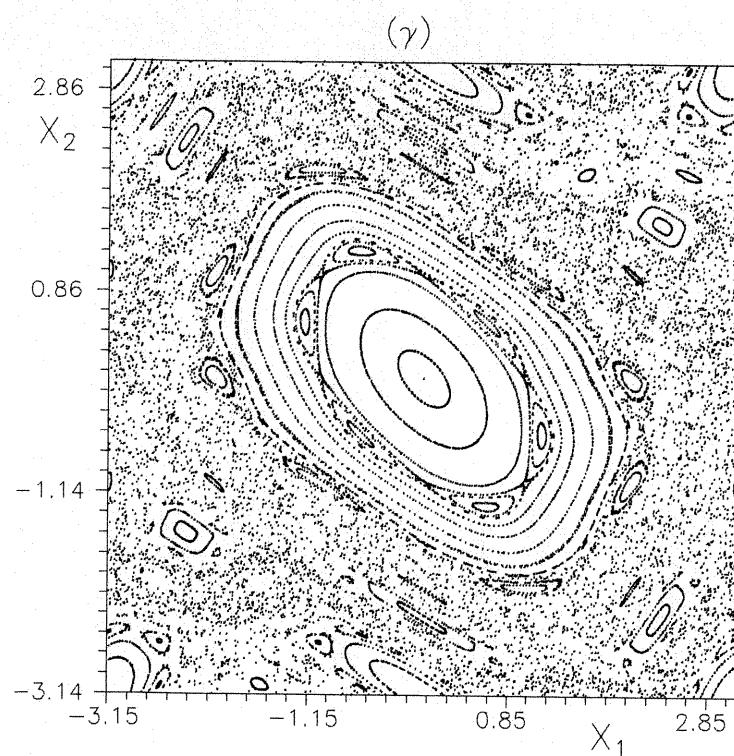
Περαιτέρω αύξηση της τιμής της παραμέτρου ν οδηγεί σε απομάκρυνση των δύο νησίδων ευστάθειας μεταξύ τους (Σχήμα B.3θ για $v=5$), ώσπου τελικά χάνονται και αυτές αφού η τροχιά γίνεται ασταθής ακολουθώντας μια διαδικασία διακλαδώσεων με διπλασιασμό περιόδων (ακολουθία Feigenbaum). Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου ν όλος ο χώρος φάσεων γίνεται χαοτικός και οι όποιες νησίδες ευστάθειας υπάρχουν, έχουν πολύ μικρό μέγεθος ώστε να μη διακρίνονται (Σχήμα B.3i για $v=8$).

B.3. Μελέτη των δομών που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων της τετραδιάστατης απεικόνισης.

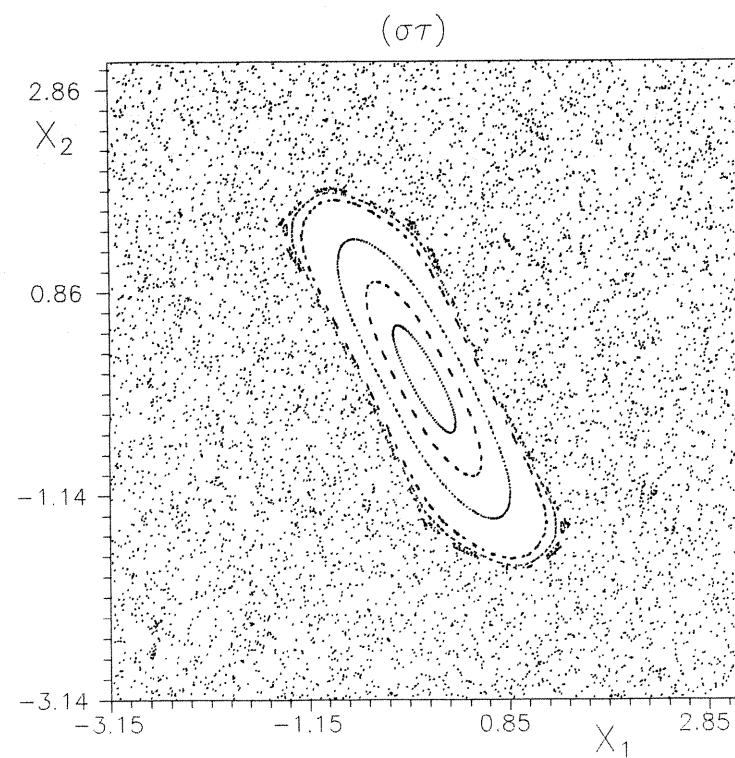
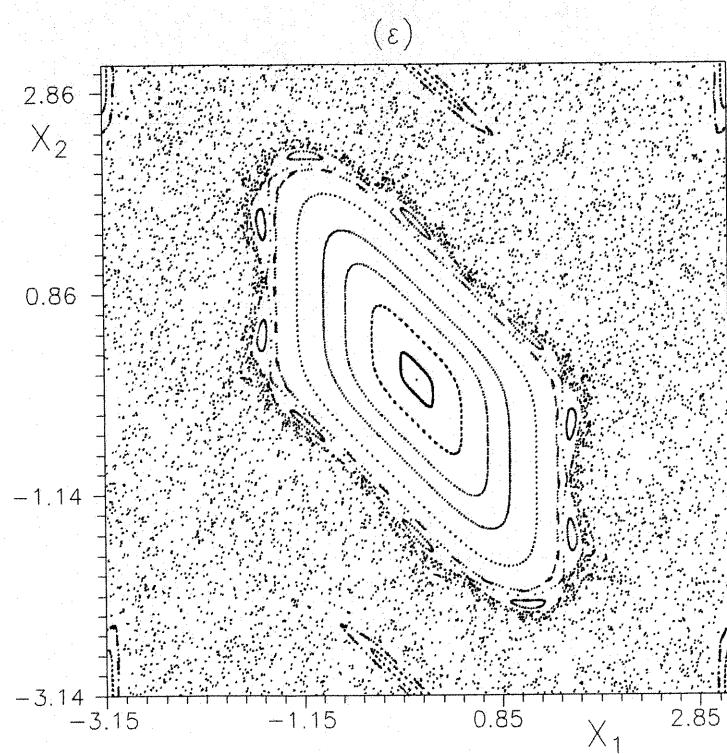
Θα μελετήσουμε στη συνέχεια λεπτομερώς τις διάφορες δομές, οι οποίες εμφανίζονται στο χώρο φάσεων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης μ, θέτοντας αρχικά $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$. Η τιμή της παραμέτρου ν είναι μικρή, οπότε η διδιάστατη απεικόνιση των x_1 και x_2 διαφέρει λίγο από την περίπτωση όπου έχουμε δύο ανεξάρτητες μονοδιάστατες απεικονίσεις. Αρχικά επίσης δίνουμε μια πολύ μικρή τιμή στην παράμετρο σύζευξης $\mu=10^{-5}$, οπότε η τετραδιάστατη



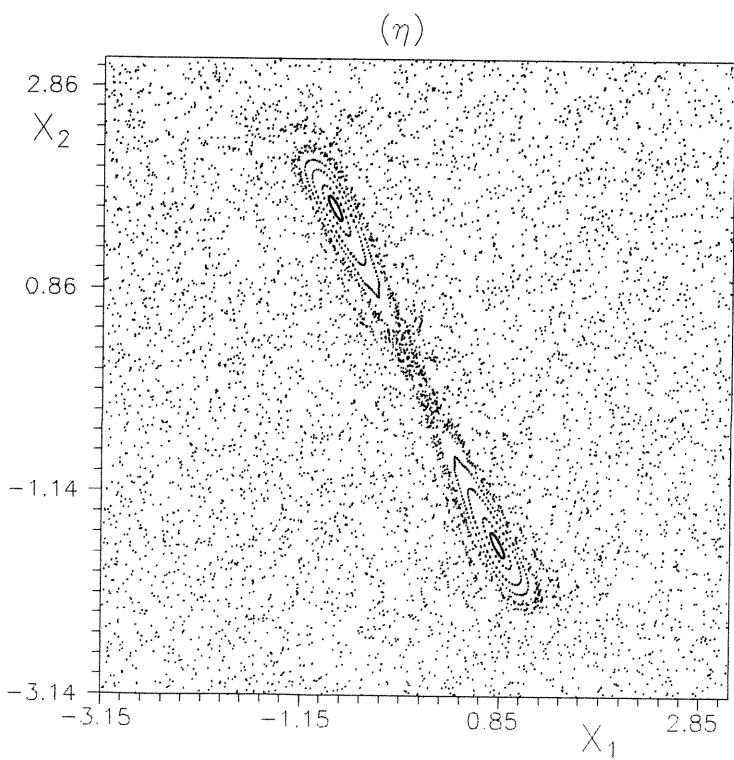
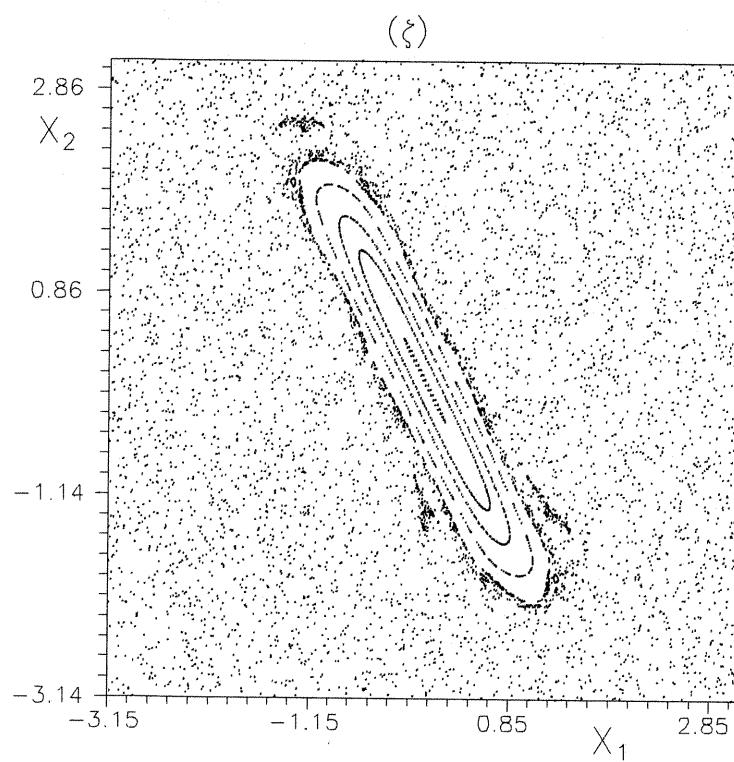
Σχήμα B.3



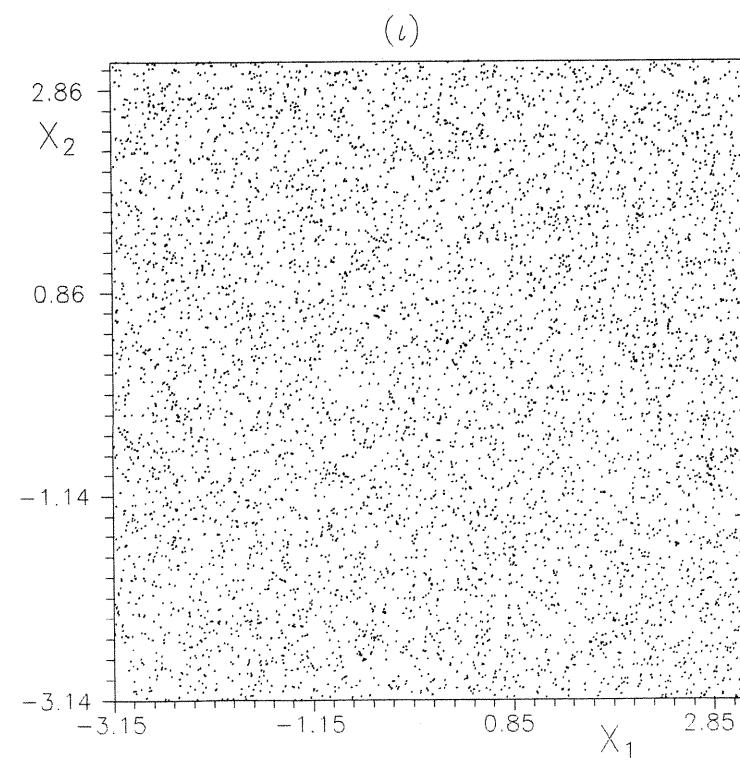
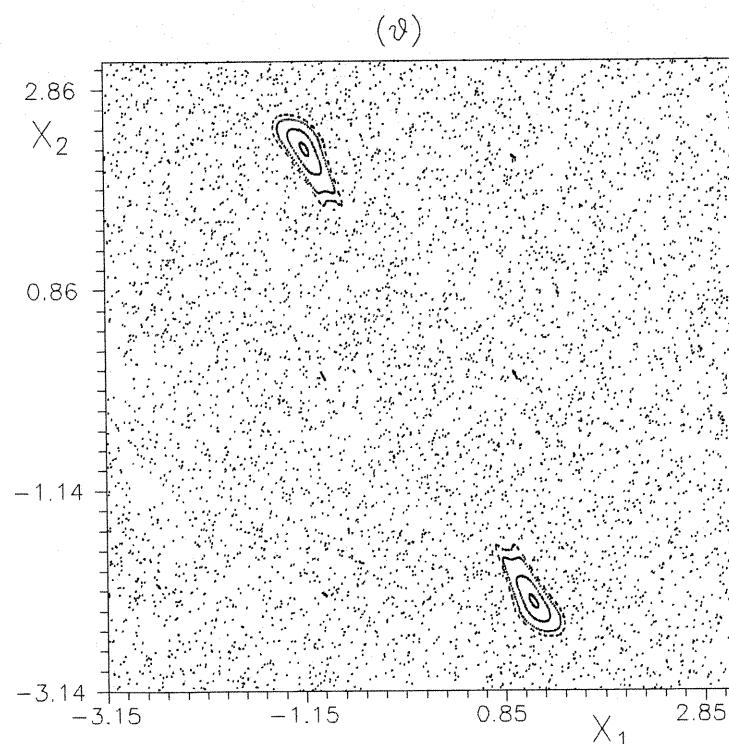
Σχήμα B.3 (συνέχεια)



Σχήμα B.3 (συνέχεια)



Σχήμα B.3 (συνέχεια)



Σχήμα B.3 : Ο χώρος φάσεων της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) για διάφορες τιμές της παραμέτρου v . Συγκεκριμένα έχουμε : α) $v=0,5$ β) $v=0,8$ γ) $v=1,2$ δ) $v=1,5$ ε) $v=2$ στ) $v=3$ ζ) $v=4$ η) $v=4,5$ θ) $v=5$ και ι) $v=8$.

απεικόνιση (B.1.1) διαφέρει λίγο από την περίπτωση των δύο ανεξάρτητων διδιάστατων απεικονίσεων. Συγκεκριμένα για $\mu=0$ η τετραδιάστατη απεικόνιση αναλύεται σε δύο διδιάστατες απεικονίσεις : στην απεικόνιση (B.2.1) για $v=10^{-3}$ και στην απεικόνιση η οποία προκύπτει από τη (B.2.1) αντικαθιστώντας τα x_1, x_2, v με x_3, x_4, κ για $\kappa=10^{-1}$. Επομένως γι' αυτές τις τιμές των παραμέτρων v και κ και για $\mu \neq 0$ έχουμε μια σύζευξη των διδιάστατων απεικονίσεων που φαίνονται στα σχήματα B.1 και B.2.

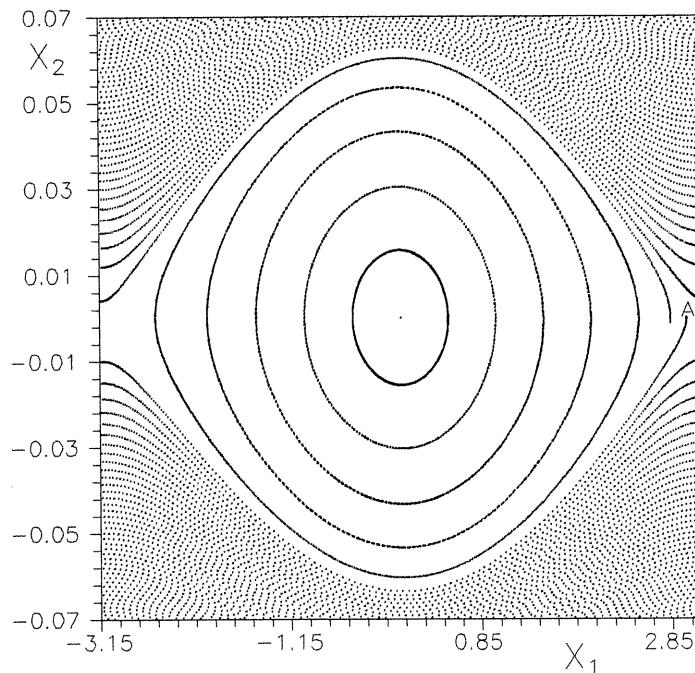
Σε μια τετραδιάστατη απεικόνιση έχουμε τέσσερις μεταβλητές, οι οποίες καθορίζουν τις συντεταγμένες ενός σημείου σ' ένα τετραδιάστατο χώρο, του οποίου δε μπορούμε να έχουμε εποπτεία. Γι' αυτό θα αναφερόμαστε στις προβολές των σημείων στα 6 δυνατά επίπεδα : x_1x_2 , x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 , x_2x_4 και x_3x_4 . Οι πιο ενδιαφέρουσες προβολές είναι αυτές στα επίπεδα x_1x_2 και x_3x_4 αφού μπορούν να συγκριθούν με τις μορφές του χώρου φάσεων της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1).

B.3.1. Οι ζώνες συντονισμού στο επίπεδο x_1x_2 .

Θα εξετάσουμε αρχικά τις μορφές που σχηματίζουν οι προβολές των σημείων διαφόρων τροχιών της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) στο επίπεδο x_1x_2 , όταν $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$. Αυτές οι προβολές φαίνονται στο σχήμα B.4. Στο κέντρο της εικόνας φαίνεται το σημείο $x_1=x_2=0$ που αντιστοιχεί στην ευσταθή περιοδική τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. Γύρω από αυτό το σημείο υπάρχουν μερικές τροχιές, οι οποίες βρίσκονται πάνω σε αμετάβλητες επιφάνειες, οι προβολές των οποίων στο επίπεδο x_1x_2 μοιάζουν με αμετάβλητες καμπύλες. Έτσι η εικόνα που παίρνουμε στο επίπεδο x_1x_2 στην περιοχή γύρω από το σημείο $x_1=x_2=0$, είναι παρόμοια με αυτήν που μας δίνει η διδιάστατη απεικόνιση (B.2.1) των x_1, x_2 για $v=10^{-3}$ (Σχήμα B.1). Αντίθετα διαφοροποίηση υπάρχει όταν εξετάζουμε τροχιές με αρχικές συνθήκες κοντά στην απλά ασταθή περιοδική τροχιά περιόδου 1, η προβολή της οποίας βρίσκεται κοντά στην περιοχή $x_1=-\pi, x_2=0$. Συγκεκριμένα για $\mu=0$ οι ακριβείς αρχικές συνθήκες αυτής της τροχιάς είναι $x_1=-\pi, x_2=x_3=x_4=0$, αλλά όταν $\mu \neq 0$ οι αρχικές συνθήκες μεταβάλλονται λίγο. Αυτή η περιοδική τροχιά είναι ασταθής στη διδιάστατη απεικόνιση (B.2.1) στο επίπεδο x_1x_2 και ευσταθής στην απεικόνιση του επιπέδου x_3x_4 για $\mu=0$. Για $\mu=10^{-5}$ η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$ και $x_2=x_3=x_4=0$ (σημείο A στο σχήμα B.4), δε δημιουργεί κλειστές αμετάβλητες καμπύλες γύρω από το σημείο $x_1=x_2=0$, αλλά αντιθέτως οι προβολές των διαδοχικών της σημείων στο επίπεδο x_1x_2 διατάσσονται με έναν ορισμένο τρόπο. Η μελέτη αυτής της τροχιάς και της μορφολογίας που δημιουργεί θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

Οπως φαίνεται στο σχήμα B.4 τα διαδοχικά σημεία της τροχιάς με αρχική συνθήκη το σημείο A βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο και κινούνται προς τα αριστερά, δηλαδή σε μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_1 . Τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη, η οποία όταν φτάνει στο αριστερό άκρο του σχήματος ($x_1=-\pi$) συνεχίζει από το δεξιό άκρο του σχήματος ($x_1=\pi$) λόγω της 2π -περιοδικότητας ($\text{mod } 2\pi$) της μεταβλητής x_1 . Έτσι φτιάχνεται μια δεύτερη καμπύλη, η οποία βρίσκεται χαμηλότερα από την προηγούμενή της στο σχήμα B.4, η οποία κινείται και αυτή προς μικρότερες τιμές του x_1 . Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται και στη συνέχεια. Με αυτόν τον τρόπο τα διαδοχικά σημεία της τροχιάς κινούνται προς περιοχές με μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_2 . Αυτή η συμπεριφορά δεν παρουσιάζεται για $\mu=0$, οπότε στη διδιάστατη απεικόνιση (B.2.1)

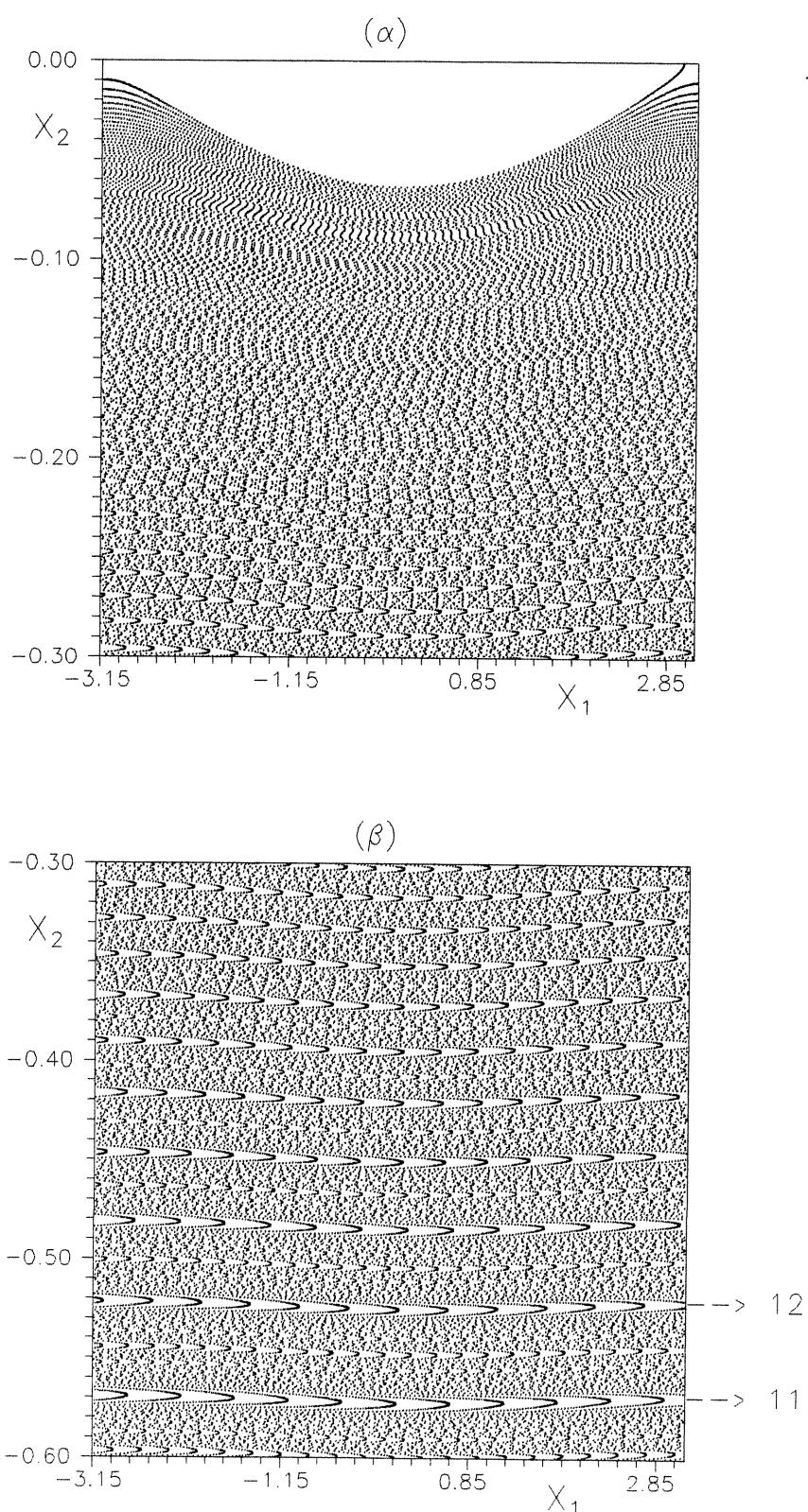
των x_1, x_2 για $\nu=10^{-3}$ έχουμε σχεδόν οριζόντιες αμετάβλητες καμπύλες στην περιοχή έξω από την κεντρική νησίδα ευστάθειας (Σχήμα B.1).

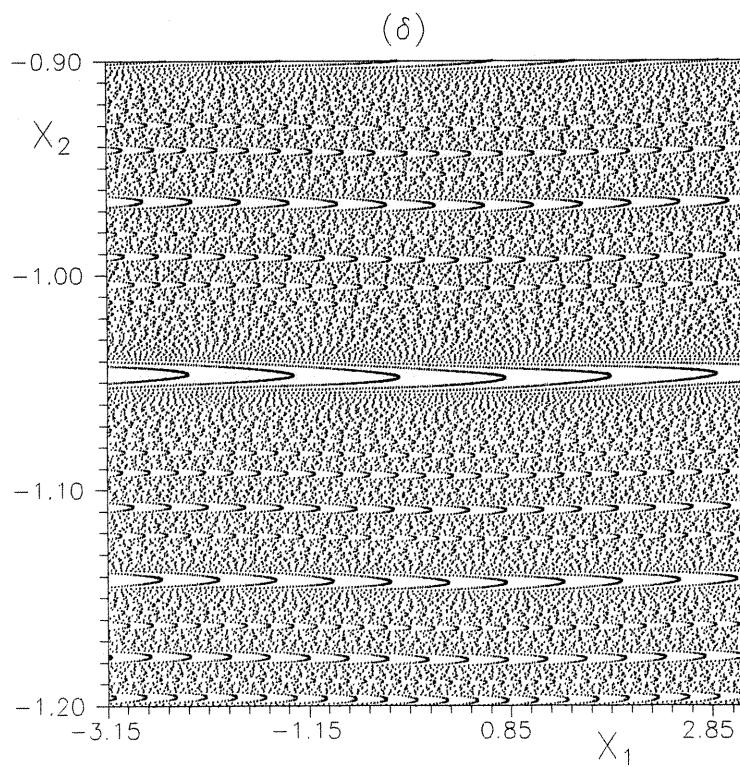
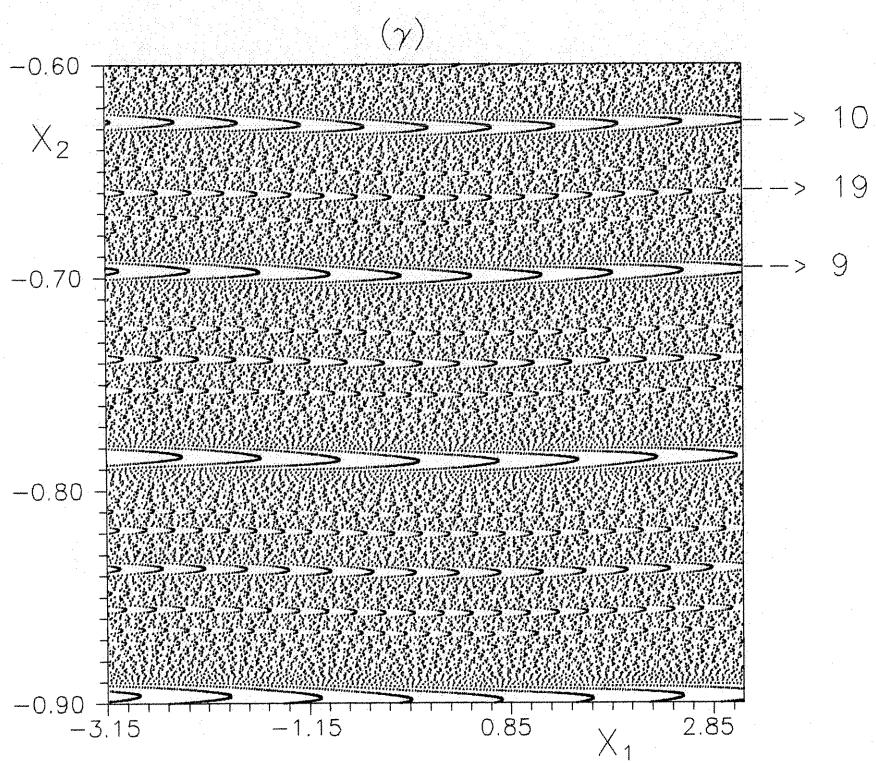


Σχήμα B.4 : Προβολές σημείων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) το επίπεδο x_1x_2 , όταν $\nu=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$. Στο σχήμα φαίνονται 7 τροχιές με αρχικές συνθήκες $x_1=0+i\cdot 0.5$ με $i=0,1,\dots,6$ και $x_2=x_3=x_4=0$. Η αρχική συνθήκη $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ σημειώνεται με Α. Τα διαδοχικά σημεία της τροχιάς με αρχική συνθήκη το σημείο Α κινούνται από τα δεξιά προς τα αριστερά πάνω σε μια καμπύλη. Όταν αυτή η καμπύλη φτάνει στο αριστερό άκρο της εικόνας $x_1=-\pi$, συνεχίζεται από το δεξιό άκρο $x_1=\pi$, κινούμενη προς τα αριστερά, ευρισκόμενη κάτω από την αρχική καμπύλη κ.ο.κ..

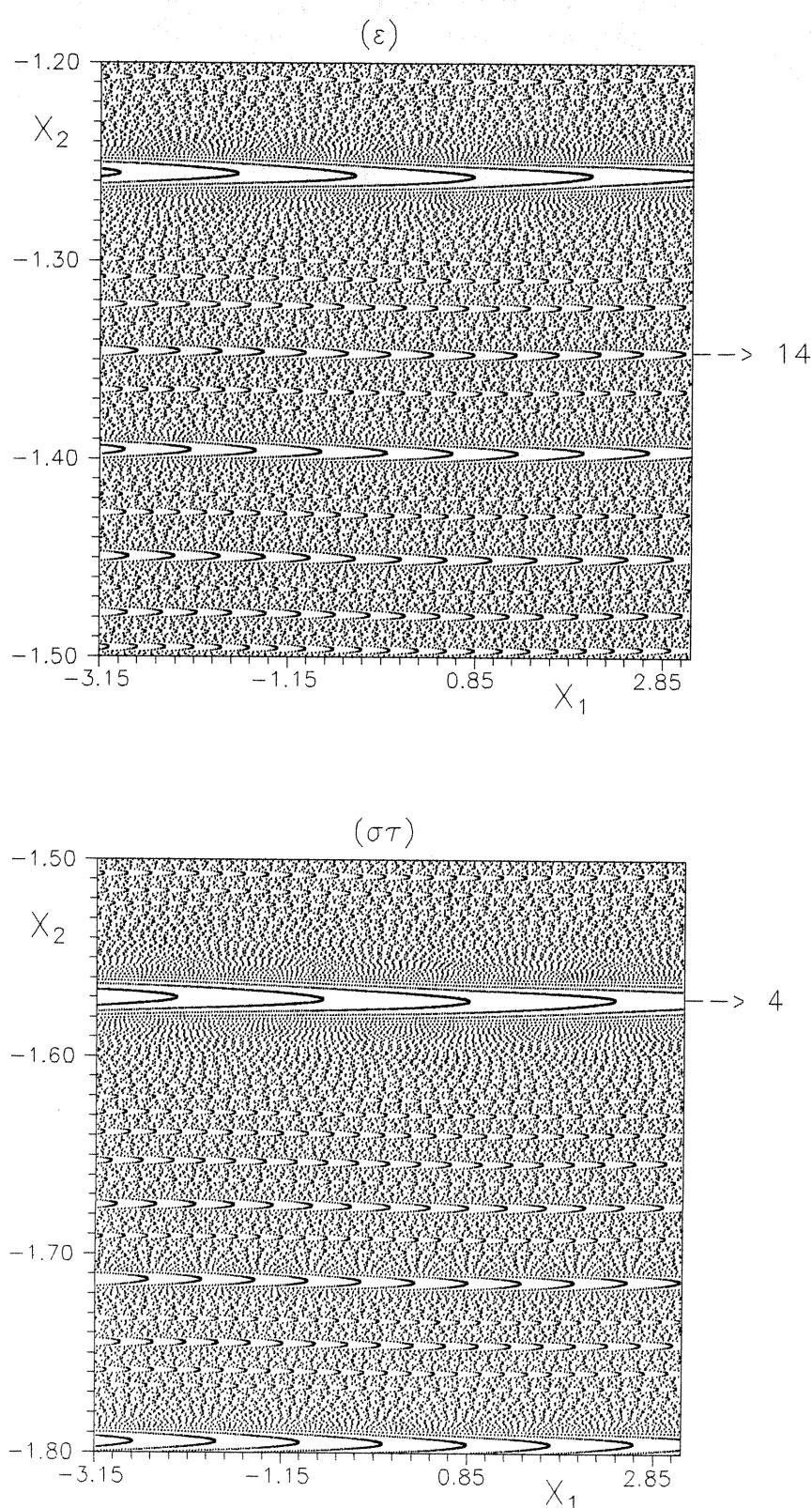
Στο σχήμα B.5 φαίνεται η εξέλιξη της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ για περίπου 180.000 επαναλήψεις. Όπως αναφέραμε τα σημεία κινούνται προς περιοχές με μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_2 και όπως φαίνεται στο σχήμα B.5α αρχικά, δηλαδή κοντά στην περιοχή $x_2=0$, κατανέμονται σχεδόν ομοιόμορφα στο επίπεδο x_1x_2 . Όσο όμως τα σημεία απομακρύνονται από αυτήν την περιοχή αρχίζει να φαίνεται ότι δημιουργούν μια συγκεκριμένη δομή. Εμφανίζονται κάποιες ζώνες, μέσα στις οποίες τα σημεία δημιουργούν ένα σύνολο από σχεδόν παραβολικές καμπύλες. Οι ζώνες αυτές γίνονται πιο ευδιάκριτες όσο η τροχιά κινείται σε περιοχές με μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_2 . Έτσι για παράδειγμα στο κάτω μέρος του σχήματος B.5β φαίνονται δύο ζώνες με 12 και 11 καμπύλες στο εσωτερικό τους, ενώ στο πάνω μέρος του σχήματος B.5γ υπάρχουν ζώνες οι οποίες περιέχουν 10 και 9 καμπύλες. Ανάμεσα στις δύο τελευταίες ζώνες μόλις διακρίνεται, υπό την παρούσα κλίμακα, μια ζώνη, η οποία περιέχει 19 καμπύλες. Παρόμοιες ζώνες φαίνονται και στα σχήματα B.5.δ,ε και στ. Στο σχήμα B.5.ε σημειώνουμε μια ζώνη στην οποία εμφανίζονται 14 καμπύλες ενώ στο σχήμα B.5.στ σημειώνουμε μια ζώνη που περιέχει 4 καμπύλες.

Αν μεγεθύνουμε τις εικόνες του σχήματος B.5 μπορούμε να διακρίνουμε και άλλες ζώνες με καμπύλες, οι οποίες υπό την παρούσα κλίμακα δε φαίνονται. Αυτές οι μεγεθύνσεις δε μπορούν να συνεχιστούν επ' άπειρον, γιατί στις εικόνες του σχήματος B.5





Σχήμα B.5 (συνέχεια)



Σχήμα B.5 : Εξέλιξη της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ για 180.000 επαναλήψεις της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) για $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$ στο επίπεδο x_1x_2 . Τα σχήματα είναι συνεχόμενα ακολουθώντας την εξέλιξη της τροχιάς. Φαίνονται περιοχές γεμάτες σημεία, ενώ σημειώνονται ζώνες στις οποίες δημιουργούνται σχεδόν παραβολικές καμπύλες.

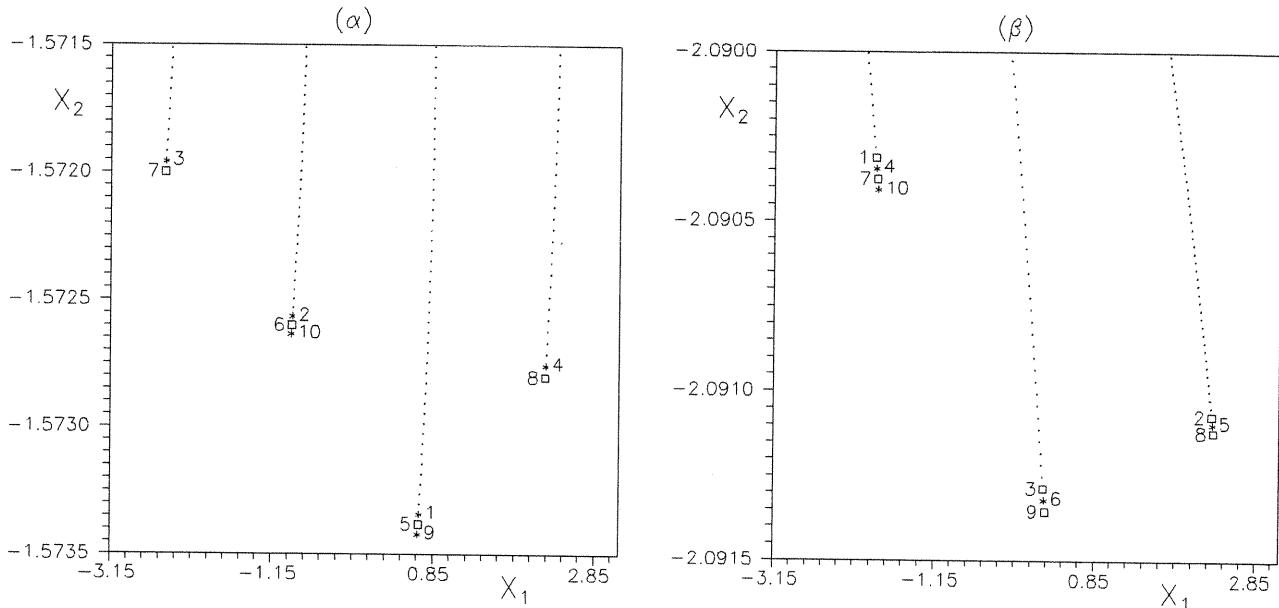
έχουμε πεπερασμένο και όχι άπειρο αριθμό σημείων. Το εύρος αυτών των ζωνών δίνεται από έναν εμπειρικό νόμο, στον οποίο θα αναφερθούμε σε επόμενη παράγραφο.

Οπως ήδη αναφέραμε, στις εικόνες του σχήματος B.5 εμφανίζονται διαδοχικές ζώνες, στις οποίες, το πλήθος των καμπυλών που περιέχουν μειώνεται κατά 1 καθώς η τιμή της συντεταγμένης x_2 , για την οποία εμφανίζονται, μειώνεται. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τις ζώνες με 12, 11, 10 και 9 καμπύλες στο εσωτερικό τους (Σχήματα B.5β και 5γ). Οπως φαίνεται από τα σχήματα οι κατακόρυφες αποστάσεις (αποστάσεις στον άξονα x_2) μεταξύ δύο διαδοχικών ζωνών αυξάνουν όταν η τιμή της συντεταγμένης x_2 μειώνεται, οπότε διακρίνονται ανάμεσα τους και ζώνες με εντελώς διαφορετικό αριθμό καμπυλών. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τη ζώνη, η οποία περιέχει 19 καμπύλες και βρίσκεται ανάμεσα στις ζώνες με 10 και 9 καμπύλες στο σχήμα B.5γ.

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται οι καμπύλες στις διάφορες ζώνες, εξετάζοντας πρώτα τις διαδοχικές ζώνες, στις οποίες το πλήθος των καμπυλών τους μειώνεται κατά 1. Στο σχήμα B.6α φαίνεται σε μεγέθυνση η ζώνη, η οποία περιέχει στο εσωτερικό της 4 καμπύλες (Σχήμα B.5τ). Οι τέσσερις καμπύλες δεν έχουν διαμορφωθεί πλήρως, γιατί έχουμε ακολουθήσει την εξέλιξη της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ μέχρι κάποιο σημείο, για να μπορέσουμε να αντιληφθούμε τον τρόπο δημιουργίας των τεσσάρων καμπυλών. Έχουμε επίσης αριθμήσει τα 10 τελευταία σημεία του σχήματος σύμφωνα με τη σειρά εμφάνισής τους. Έτσι καταλαβαίνουμε, ότι εμφανίζεται από 1 σημείο διαδοχικά σε κάθε μια από τις τέσσερις καμπύλες με φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά, δηλαδή προς μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_1 , με επιστροφή στη δεξιά μεριά του σχήματος λόγω της 2π -περιοδικότητας ($\text{mod } 2\pi$) της συντεταγμένης x_1 . Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα συντονισμό $\frac{1}{4}$. Ανάλογη συμπεριφορά έχουμε και στις άλλες ζώνες, το πλήθος των καμπυλών των οποίων μειώνεται κατά 1, όπως φαίνεται για παράδειγμα στο σχήμα B.6β, στο οποίο φαίνεται η ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{3}$. Γενικά λοιπόν, σε αυτές τις ζώνες τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται σε διαδοχικές καμπύλες, με φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά, οπότε αυτές οι ζώνες αντιστοιχούν σε συντονισμούς της μορφής $\frac{1}{n}$ με $n=...,10,9,...,1$ όπου n το πλήθος των καμπυλών. Όπως φαίνεται από τα σχήματα B.7 οι ζώνες αυτές εμφανίζονται όταν $x_1 \approx -2\pi \frac{1}{n}$ ($\text{mod } 2\pi$). Όσο αυξάνει η τιμή του n , ο συντονισμός $\frac{1}{n}$ βρίσκεται πιο κοντά στην κεντρική περιοχή $x_1=0$, οπότε η αντίστοιχη ζώνη εμφανίζει μια καμπύλωση λόγω της επίδρασης της κεντρικής περιοχής (Σχήμα B.4). Καθώς η τιμή του n ελαττώνεται η ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{n}$ γίνεται περισσότερο οριζόντια, διότι απομακρύνεται από την κεντρική περιοχή. Για παράδειγμα, η ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{4}$ (Σχήμα B.7γ) είναι περισσότερο οριζόντια σε σχέση με τις ζώνες των συντονισμών $\frac{1}{11}$ (Σχήμα B.7β) και $\frac{1}{22}$ (Σχήμα B.7α).

Για $n=2$ εμφανίζεται ο συντονισμός $\frac{1}{2}$, η ζώνη του οποίου σχηματίζεται στην περιοχή $x_1 \approx -\pi$ και συνεχίζεται στην περιοχή $x_1 \approx \pi$, λόγω της 2π -περιοδικότητας ($\text{mod } 2\pi$) της μεταβλητής x_1 . Για $n=1$ ο συντονισμός $\frac{1}{1}$ αντιστοιχεί σε μια καμπύλη η οποία εμφανίζεται στην περιοχή $x_1 \approx -2\pi$, δηλαδή $x_1 \approx 0$ λόγω της 2π -περιοδικότητας. Στο σχήμα B.4 φαίνεται αυτή η καμπύλη η οποία ξεκινάει από το σημείο A καθώς και η καμπύλη η οποία εμφανίζεται όταν ξαναπερνάει η τροχιά για πρώτη φορά από την περιοχή $x_1 \approx 0$. Όπως βλέπουμε η τροχιά δεν περνάει από το αρχικό της σημείο, οπότε δεν είναι περιοδική. Αν ακολουθήσουμε την τροχιά για περισσότερες επαναλήψεις μετά το πρώτο πέρασμά της από την κεντρική περιοχή, βλέπουμε ότι τα σημεία δημιουργούν δομές ίδιας μορφής με αυτές του σχήματος B.5, οι οποίες όμως δεν ταυτίζονται στο χώρο με τις αρχικές. Οι καμπύλες που σχηματίζονται, εμφανίζονται ανάμεσα στις προϋπάρχουσες

καμπύλες παρουσιάζοντας μια ασθενή χαοτική συμπεριφορά, στην οποία θα αναφερθούμε αργότερα.



Σχήμα B.6 : Μεγέθυνση της περιοχής των συντονισμών α) $\frac{1}{4}$ και β) $\frac{1}{3}$, στο επίπεδο x_1x_2 . Σημειώνουμε τη σειρά εμφάνισης μερικών σημείων, ώστε να γίνει κατανοητός ο τρόπος δημιουργίας των διαφόρων καμπυλών. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στα σημεία, τα οποία σημειώνονται με αστερίσκο, βρίσκεται στα δεξιά τους, ενώ σ' αυτά τα οποία σημειώνονται με ένα μικρό τετράγωνο στα αριστερά τους.

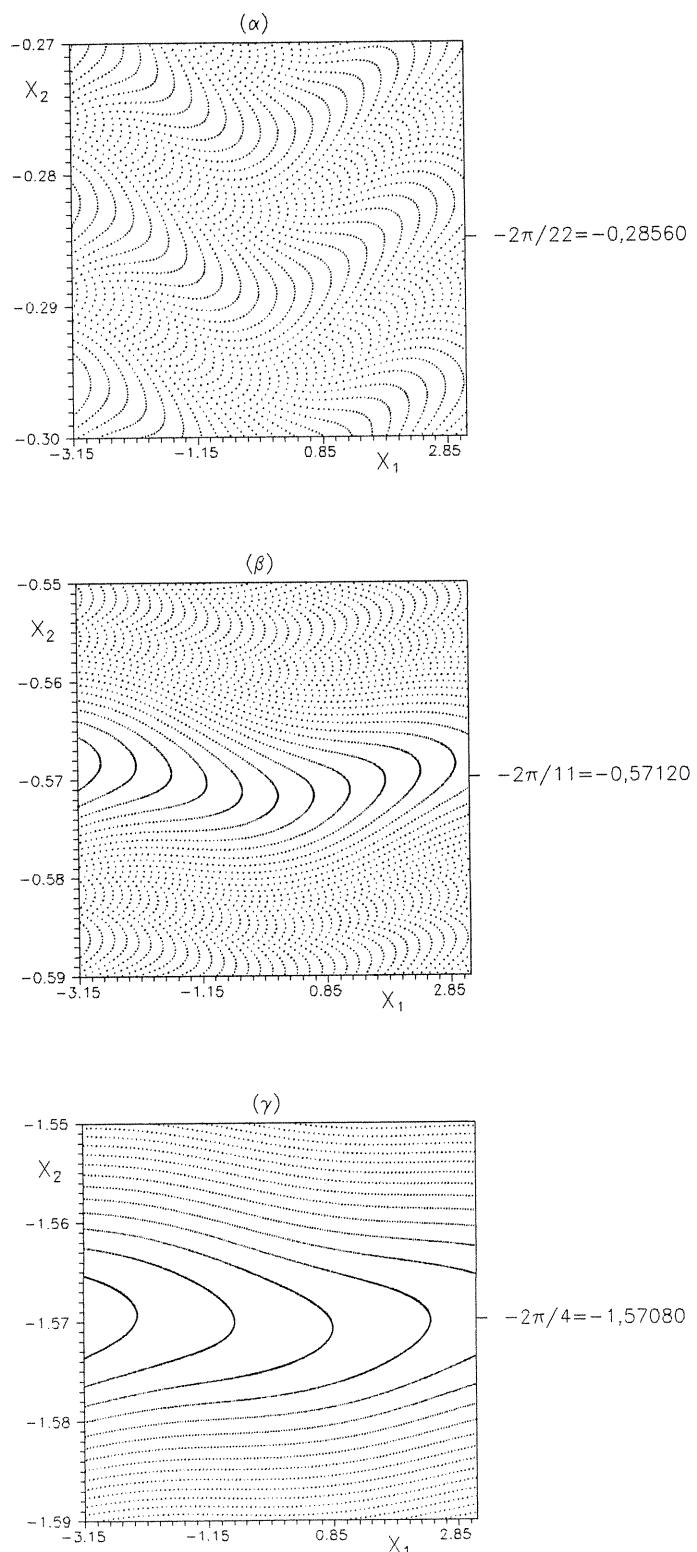
Θα εξετάσουμε τώρα τον τρόπο σχηματισμού των καμπυλών στις ζώνες που εμφανίζονται ανάμεσα στους συντονισμούς $\frac{1}{n}$. Στο σχήμα B.8 βλέπουμε σε μεγέθυνση μια ζώνη στην οποία έχουν σχηματιστεί 14 καμπύλες. Η ζώνη αυτή σημειώνεται και στο σχήμα B.5e. Από την αρίθμηση των σημείων παρατηρούμε, ότι τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται ανά τρεις καμπύλες με φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά, έτσι ώστε για να έχουμε από ένα σημείο σε κάθε μια από τις 14 καμπύλες, τα σημεία διατρέχουν την εικόνα από τα δεξιά προς τα αριστερά τρεις φορές. Επομένως έχουμε το συντονισμό $\frac{3}{14}$. Άρα οι συντονισμοί, οι οποίοι εμφανίζονται ανάμεσα στους συντονισμούς $\frac{1}{n}$ είναι της μορφής $\frac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m < n$, $m \neq 1$ και δημιουργούν ζώνες που περιέχουν n καμπύλες, όπου τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται κάθε m καμπύλες με φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά. Οι συντονισμοί αυτοί εμφανίζονται όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$.

Επομένως στο επίπεδο x_1x_2 έχουμε όλους τους συντονισμούς που αντιστοιχούν στους ρητούς αριθμούς $\frac{m}{n}$ με $0 < \frac{m}{n} \leq 1$, όταν οι προβολές των σημείων της τροχιάς βρίσκονται στην περιοχή για την οποία έχουμε :

$$x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi} \quad \text{με } m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m \leq n \quad (\text{B.3.11}).$$

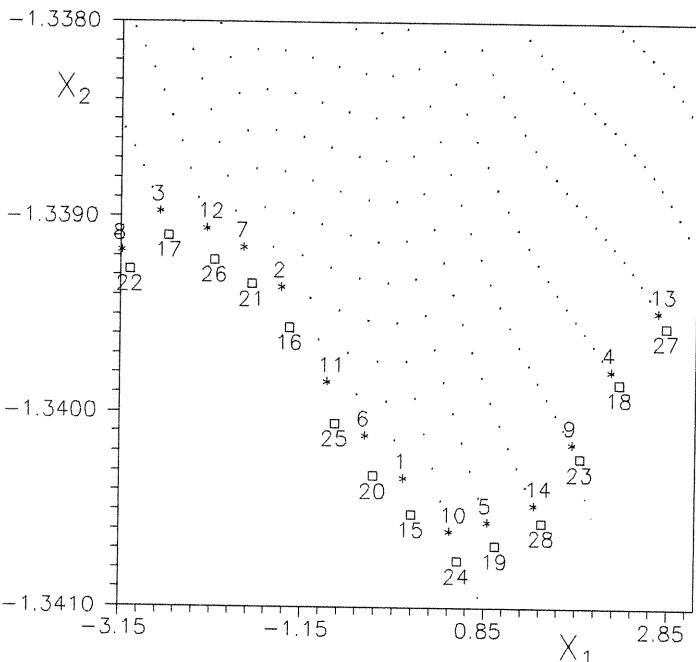
Επειδή οι ρητοί αριθμοί είναι άπειροι, αλλά το πλήθος των σημείων στο επίπεδο x_1x_2 πεπερασμένο, σχηματίζονται οι ζώνες των συντονισμών μέχρι κάποιο όριο, δηλαδή μέχρι κάποια μέγιστη τιμή του παρονομαστή του συντονισμού.

Άρα η δομή που παρατηρούμε στο επίπεδο x_1x_2 της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1), επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) στο



Σχήμα B.7 : Μεγέθυνση των ζωνών των συντονισμών α) $\frac{1}{22}$ β) $\frac{1}{11}$ και γ) $\frac{1}{4}$. Οι συντονισμοί εμφανίζονται όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{1}{n} \pmod{2\pi}$.

επίπεδο αυτό ($\mu=0$). Συγκεκριμένα οι συντονισμοί $\frac{m}{n}$ της απεικόνισης (B.2.1) για $n=0$, στους οποίους είχαμε να οριζοντίως τοποθετημένα σημεία, τα οποία διαγράφονται ανά m , όταν $x_2 = -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$, επηρεάζουν την τετραδιάστατη απεικόνιση (B.1.1) για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης ($\mu=10^{-5}$) και δημιουργούν ζώνες συντονισμού όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ όπου έχουμε να καμπύλες με τα διαδοχικά σημεία να εμφανίζονται κάθε m καμπύλες.



Σχήμα B.8 : Μεγέθυνση της ζώνης του συντονισμού $\frac{3}{14}$. Μερικά σημεία αριθμούνται σύμφωνα με τη σειρά εμφάνισής τους. Υπάρχουν 14 καμπύλες και τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται κάθε 3 καμπύλες, όπως φαίνεται από την αρίθμηση των σημείων. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στα σημεία, τα οποία σημειώνονται με αστερίσκο, βρίσκεται πάνω από αυτά, ενώ είναι κάτω από τα σημεία που σημειώνονται με ένα μικρό τετράγωνο.

Ένας τρόπος τοποθέτησης των ρητών αριθμών σε αύξουσα σειρά, είναι η διαδικασία του δέντρου του Farey (Farey tree, MacKay et al. 1984). Για να δημιουργήσουμε το δέντρο του Farey ορίζουμε ως μηδενική γενιά ένα ζεύγος ρητών αριθμών $\frac{m_1}{n_1}$ και $\frac{m_2}{n_2}$ όταν ικανοποιείται μια από τις σχέσεις :

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1 \quad (\text{B.3.12}).$$

Οι ρητοί αυτοί ονομάζονται γειτονικοί. Για να δημιουργήσουμε ένα ρητό ανάμεσα τους, προσθέτουμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές τους και παίρνουμε τον :

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} \quad (\text{B.3.13}),$$

ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στους δύο γονείς και είναι γειτονικός, με την παραπάνω έννοια, με κάθε έναν από αυτούς. Σημειώνουμε ότι ο ρητός $\frac{m_3}{n_3}$ έχει το μικρότερο δυνατό

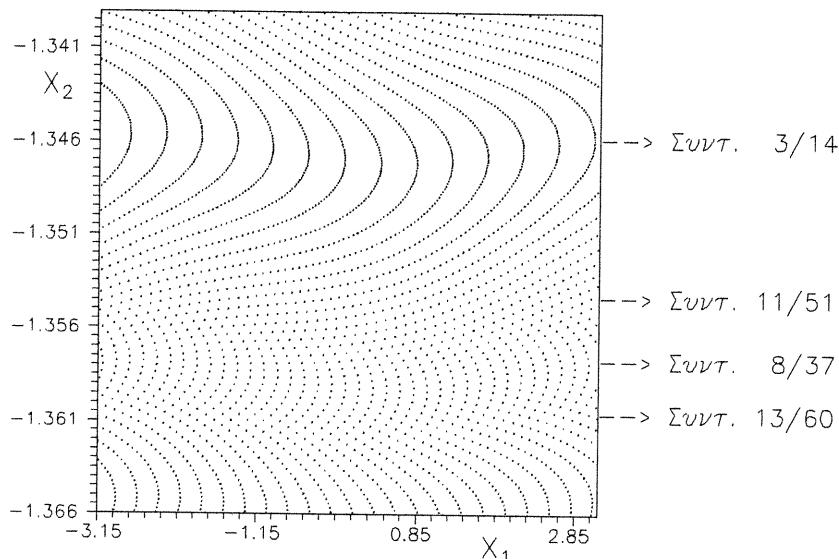
παρονομαστή από όλους τους ρητούς που βρίσκονται ανάμεσα στους αρχικούς γειτονικούς ρητούς. Δύο νέοι θυγατρικοί ρητοί κατασκευάζονται προσθέτοντας αριθμητές και παρονομαστές του $\frac{m_3}{n_3}$ με κάθε έναν από τους γονείς του. Επαναλαμβάνοντας συνεχώς την παραπάνω διαδικασία μπορούμε τελικά να βάλουμε σε αύξουσα σειρά τους ρητούς που βρίσκονται στο διάστημα $\left[\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \right]$, θεωρώντας για παράδειγμα ότι $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$. Στην περίπτωση μας οι προβολές των σημείων της τροχιάς που εξετάζουμε επηρεάζονται στο επίπεδο x_1x_2 από όλους τους συντονισμούς $\frac{m}{n}$ με $0 < \frac{m}{n} \leq 1$.

Θα εξετάσουμε τώρα πως τα σημεία της τροχιάς βρίσκονται αρχικά πάνω σε n_1 καμπύλες και τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται κάθε m_1 καμπύλες (συντονισμός $\frac{m_1}{n_1}$) και αργότερα βρίσκονται πάνω σε n_2 καμπύλες όπου τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται κάθε m_2 καμπύλες (συντονισμός $\frac{m_2}{n_2} > \frac{m_1}{n_1}$). Συγκεκριμένα, για να δούμε πως τα σημεία της τροχιάς δημιουργούν κάθε φορά τις καμπύλες διαφορετικών συντονισμών, θα εξετάσουμε τον τρόπο διάταξης των σημείων μετά το συντονισμό $\frac{3}{14}$ (Σχήμα B.9). Με τη βοήθεια του δέντρου του Farey βρίσκουμε τους συντονισμούς που συναντάει η τροχιά μετά τον $\frac{3}{14}$ καθώς κινείται στο επίπεδο x_1x_2 προς περιοχές με όλο και μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_2 . Αρχίζουμε με τους γειτονικούς συντονισμούς $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{4}$, οπότε προσθέτοντας αριθμητές και παρονομαστές, βρίσκουμε ανάμεσα τους το συντονισμό $\frac{2}{9}$. Δουλεύοντας ανάλογα βρίσκουμε το συντονισμό $\frac{3}{14}$ ανάμεσα στους $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{9}$ και το συντονισμό $\frac{5}{23}$ ανάμεσα στους $\frac{3}{14}$ και $\frac{2}{9}$. Τελικά βρίσκουμε τους διαδοχικούς συντονισμούς $\frac{11}{51}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{13}{60}$ και $\frac{5}{23}$ μετά τον $\frac{3}{14}$. Φυσικά δεν έχουμε βρει όλους τους ρητούς αριθμούς ανάμεσα στους $\frac{1}{5}$ και $\frac{1}{4}$, γιατί συντονισμοί με πολύ μεγάλο παρονομαστή δεν είναι ευδιάκριτοι.

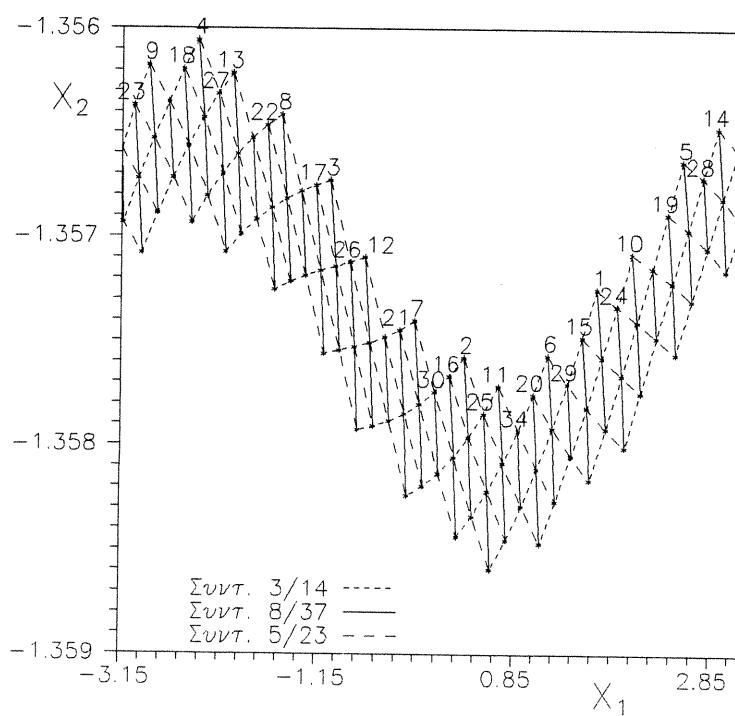
Στο σχήμα B.9 φαίνονται 2.800 σημεία της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ κοντά στην περιοχή του συντονισμού $\frac{3}{14}$. Οι 37 καμπύλες, που σχηματίζουν τα σημεία χαμηλότερα από την περιοχή του συντονισμού $\frac{3}{14}$ αντιστοιχούν στο συντονισμό $\frac{8}{37}$. Στο σχήμα B.9 σημειώνουμε επίσης και τις περιοχές στις οποίες εμφανίζονται οι συντονισμοί $\frac{11}{51}$ και $\frac{13}{60}$, αν και οι 51 καμπύλες που αντιστοιχούν στο συντονισμό $\frac{11}{51}$ και οι 60 καμπύλες του συντονισμού $\frac{13}{60}$ δε διακρίνονται εύκολα. Στο κάτω μέρος του σχήματος B.9 φαίνεται η αρχή του σχηματισμού των 23 καμπυλών του συντονισμού $\frac{5}{23}$. Βλέπουμε λοιπόν, ότι στο επίπεδο x_1x_2 , μετά το συντονισμό $\frac{3}{14}$ δημιουργούνται οι ζώνες των συντονισμών από τους οποίους περνάει η τροχιά, σύμφωνα με τη διαδικασία του δέντρου του Farey.

Στο σχήμα B.10 βλέπουμε σε μεγέθυνση 100 σημεία του σχήματος B.9, τα οποία βρίσκονται στη ζώνη του συντονισμού $\frac{8}{37}$. Πάνω από ορισμένα σημεία έχουμε σημειώσει αριθμούς ώστε να γίνει κατανοητή η σειρά εμφάνισής τους. Επίσης έχουμε σχεδιάσει καμπύλες διαφόρων συντονισμών. Συγκεκριμένα, οι καμπύλες που σχεδιάζονται με μικρή διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχούν στο συντονισμό $\frac{3}{14}$. Τα σημεία 1, 15, 29,... βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη, τα σημεία 2, 16, 30,... πάνω σε μια άλλη κ.ο.κ.. Με αυτόν τον τρόπο φτιάχνουμε 14 καμπύλες όπου τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται κάθε τρεις καμπύλες. Για παράδειγμα ανάμεσα στις καμπύλες που ξεκινούν από τα σημεία 1 και 2 βρίσκονται δύο άλλες καμπύλες αυτές που ξεκινούν από τα σημεία 6 και 11 αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι

όταν μια καμπύλη φτάσει στο αριστερό άκρο του σχήματος ($x_1 = -\pi$) ξαναεμφανίζεται στο δεξιό άκρο ($x_1 = \pi$) λόγω της 2π -περιοδικότητας της μεταβλητής x_1 .



Σχήμα B.9 : Η περιοχή του επιπέδου $x_1 x_2$ κοντά στη ζώνη του συντονισμού $\frac{3}{14}$. Σημειώνουμε τις ζώνες κάποιων ακόμα συντονισμών (Συντ.) αν και οι καμπύλες κάποιων από αυτούς φαίνονται σχετικά δύσκολα.



Σχήμα B.10 : Μεγέθυνση της περιοχής του σχήματος B.9 στην οποία εμφανίζεται ο συντονισμός $\frac{8}{37}$. Στο σχήμα φαίνονται 100 σημεία. Οι αριθμοί πάνω από μερικά σημεία, μας βοηθούν να καταλάβουμε τη σειρά με την οποία αυτά εμφανίζονται. Έχουν σχεδιαστεί οι καμπύλες διαφόρων συντονισμών. Οι καμπύλες του συντονισμού $\frac{8}{37}$ είναι καλύτερα ορατές στην αντίστοιχη περιοχή του σχήματος B.9 γιατί είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 , σε αντίθεση με τις καμπύλες των συντονισμών $\frac{3}{14}$ και $\frac{5}{23}$ οι οποίες είναι λοξές.

Όμως τα σημεία του σχήματος B.10 μπορούν να τοποθετηθούν και επάνω σε 37 καμπύλες όπου τα διαδοχικά σημεία να εμφανίζονται κάθε 8 καμπύλες, Αυτές οι καμπύλες σχεδιάζονται με συνεχή γραμμή. Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει αυτή η διάταξη τότε ανάμεσα στις καμπύλες που ξεκινούν από τα σημεία 1 και 2 υπάρχουν άλλες 7 καμπύλες, συγκεκριμένα αυτές που ξεκινούν από τα σημεία 15, 29, 6, 20, 34, 11 και 25. Αυτές οι καμπύλες αντιστοιχούν στο συντονισμό $\frac{8}{37}$. Με μια ανάλογη διαδικασία μπορούμε να τοποθετήσουμε τα σημεία πάνω σε 23 καμπύλες όπου τα διαδοχικά σημεία εμφανίζονται κάθε 5 καμπύλες. Αυτές οι καμπύλες αντιστοιχούν στο συντονισμό $\frac{5}{23}$ και σχεδιάζονται με μεγάλη διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα B.10.

Εξετάζοντας τις καμπύλες των διαφόρων συντονισμών πάνω στις οποίες μπορούμε να διατάξουμε τα σημεία του σχήματος B.10, παρατηρούμε ότι οι καμπύλες του συντονισμού $\frac{3}{14}$ είναι αρκετά λοξές με φορά προς τα κάτω και αριστερά έχοντας θετική κλίση. Αντίθετα οι καμπύλες του συντονισμού $\frac{8}{37}$ είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 , ενώ οι καμπύλες του συντονισμού $\frac{5}{23}$ είναι και αυτές λοξές με φορά προς τα κάτω και δεξιά έχοντας αρνητική κλίση. Στη μακροσκοπική εικόνα του σχήματος B.9 τα 100 σημεία του σχήματος B.10, φαίνεται ότι βρίσκονται πάνω στις καμπύλες του συντονισμού $\frac{8}{37}$ οι οποίες είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 , ενώ είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς τα σημεία αυτά πάνω στις καμπύλες κάποιου άλλου συντονισμού.

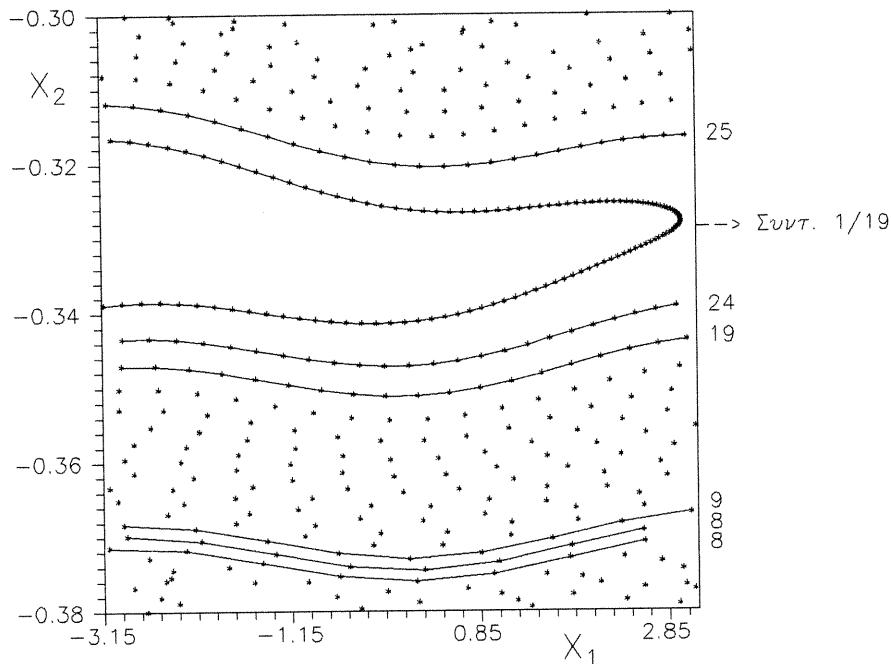
Εξετάζοντας με ανάλογο τρόπο τη διάταξη και άλλων σημείων της τροχιάς πάνω σε καμπύλες διαφόρων συντονισμών, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένας συντονισμός $\frac{m}{n}$ είναι μακροσκοπικά (δηλαδή όταν δεν εξετάζουμε τα σημεία με μεγάλη μεγέθυνση) ορατός, όταν οι καμπύλες του είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 . Αυτό συμβαίνει όταν τα σημεία της τροχιάς βρίσκονται στην περιοχή $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$. Πριν από την εμφάνιση του συντονισμού, δηλαδή όταν οι τιμές της συντεταγμένης x_2 είναι μεγαλύτερες από $-2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$, οι καμπύλες του συντονισμού έχουν αρνητική κλίση στο επίπεδο $x_1 x_2$. Μετά από την εμφάνιση του συντονισμού, δηλαδή όταν οι τιμές της συντεταγμένης x_2 είναι μικρότερες από $-2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$, οι καμπύλες του συντονισμού έχουν θετική κλίση. Γενικά θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε τα σημεία της τροχιάς πάνω σε καμπύλες που αντιστοιχούν σε οποιονδήποτε δυνατό συντονισμό $\frac{m}{n}$, όσο όμως πιο μακριά βρίσκονται τα σημεία από την περιοχή εμφάνισης του συντονισμού, πριν ή μετά από αυτήν, τόσο πιο λοξές και στρεβλωμένες, άρα και πιο δυσδιάκριτες, είναι οι καμπύλες.

Για να γίνει ορατός ένας συντονισμός στο επίπεδο $x_1 x_2$, πρέπει να υπάρχουν αρκετά σημεία στην περιοχή του, έτσι ώστε να σχηματιστούν οι καμπύλες του. Όσο η τάξη ενός συντονισμού αυξάνει, δηλαδή όσο αυξάνει η τιμή του παρονομαστή του, τόσο περισσότερες καμπύλες εμφανίζονται στη ζώνη του συντονισμού άρα απαιτείται και μεγαλύτερος αριθμός σημείων για να σχηματιστούν αυτές οι καμπύλες. Επειδή όμως το πλήθος των σημείων που βρίσκονται σε μια περιοχή του επιπέδου $x_1 x_2$ είναι σχεδόν ανάλογο με το πλάτος Δ x , στον άξονα x_2 αυτής της περιοχής, δε μπορούν να εμφανιστούν συντονισμοί τάξης μεγαλύτερης από κάποιο συγκεκριμένο όριο, αφού το πλάτος στον άξονα x_2 της ζώνης κάθε συντονισμού μειώνεται με την αύξηση της τάξης του συντονισμού, ενώ από την άλλη μεριά το πλήθος των καμπυλών αυξάνει. Το θέμα θα μας απασχολήσει στην παράγραφο B.3.3 όπου θα δώσουμε αριθμητικές εκτιμήσεις του πλάτους της ζώνης κάθε συντονισμού καθώς και της μέγιστης τάξης των εμφανιζόμενων συντονισμών.

Όπως αναφέραμε, στη ζώνη εμφάνισης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$, δηλαδή όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$, τα σημεία της τροχιάς σχηματίζουν η καμπύλες, οι οποίες είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 . Αν επομένως δε σημειώνουμε στο επίπεδο x_1x_2 όλα τα σημεία, αλλά σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε η επαναλήψεις της απεικόνισης, τότε στην περιοχή εμφάνισης του συντονισμού θα εμφανιστεί μόνο μια καμπύλη. Αυτή η καμπύλη θα έχει αρνητική κλίση σε μια περιοχή πριν από την περιοχή εμφάνισης του συντονισμού $\frac{m}{n}$ ($x_2 > -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$) και θετική κλίση μετά από αυτή ($x_2 < -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$). Καθώς όμως εξελίσσεται η τροχιά, τα σημεία της κινούνται προς περιοχές με μικρότερες τιμές της συντεταγμένης x_2 , οπότε η τροχιά είναι δυνατόν να περάσει από την περιοχή ενός άλλου συντονισμού $\frac{m'}{n}$ με τον ίδιο παρονομαστή. Επομένως σχεδιάζοντας πάλι 1 σημείο κάθε η επαναλήψεις της απεικόνισης θα έχουμε μια καμπύλη στην περιοχή $x_2 \approx -2\pi \frac{m'}{n} \pmod{2\pi}$. Στην περιοχή όμως ανάμεσα στις ζώνες των δύο αυτών συντονισμών η καμπύλη που προκύπτει σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε η επαναλήψεις πρέπει να έχει θετική κλίση, αφού βρίσκεται σε περιοχή κάτω από τη ζώνη του συντονισμού $\frac{m}{n}$ ($x_2 < -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$), αλλά από την άλλη μεριά πρέπει να έχει αρνητική κλίση, αφού βρίσκεται σε μια περιοχή πάνω από τη ζώνη του συντονισμού $\frac{m'}{n}$ ($x_2 > -2\pi \frac{m'}{n} \pmod{2\pi}$), πράγμα το οποίο φαίνεται αντιφατικό.

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα θα εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα : τη μορφή της καμπύλης που προκύπτει σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε 19 επαναλήψεις της απεικόνισης, στην περιοχή ανάμεσα στις ζώνες των συντονισμών $\frac{1}{19}$ και $\frac{2}{19}$, δηλαδή όταν $-2\pi \frac{2}{19} < x_2 < -2\pi \frac{1}{19}$. Στο σχήμα B.11 φαίνεται η περιοχή του επιπέδου x_1x_2 κοντά στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{19}$. Στο σχήμα σχεδιάζουμε ένα σημείο κάθε 19 επαναλήψεις της απεικόνισης, γι' αυτό και στην περιοχή εμφάνισης του συντονισμού $\frac{1}{19}$ έχουμε μόνο μια καμπύλη. Σε ορισμένες περιοχές του σχήματος έχουμε σχεδιάσει την καμπύλη πάνω στην οποία βρίσκονται τα διαδοχικά σημεία. Σημειώνουμε ότι στην πραγματικότητα δύο διαδοχικά σημεία του σχήματος B.11 προκύπτουν μετά από 19 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Επίσης όταν η καμπύλη φτάνει στο δεξιό ή στο αριστερό άκρο του σχήματος εμφανίζεται στο αριστερό ή στο δεξιό άκρο αντίστοιχα λόγω της 2π-περιοδικότητας της μεταβλητής x_1 . Η καμπύλη που σημειώνεται πάνω από τη ζώνη εμφάνισης του συντονισμού $\frac{1}{19}$ ($x_2 > -2\pi \frac{1}{19}$) έχει φορά από τα αριστερά προς τα δεξιά, γιατί κάθε σημείο της βρίσκεται δεξιότερα από το προηγούμενό του. Στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{19}$ βλέπουμε ότι η καμπύλη αλλάζει φορά διαγραφής, με αποτέλεσμα στην περιοχή μετά την εμφάνιση του συντονισμού $\frac{1}{19}$ ($x_2 < -2\pi \frac{1}{19}$) η καμπύλη να έχει φορά από τα δεξιά προς τα αριστερά, αφού κάθε σημείο της βρίσκεται αριστερότερα από το προηγούμενό του. Όσο η τροχιά απομακρύνεται από τη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{19}$ τα διαδοχικά κομμάτια της καμπύλης πλησιάζουν μεταξύ τους, δηλαδή μειώνεται η μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση. Επίσης μειώνεται το πλήθος των σημείων που βρίσκονται πάνω στα διαδοχικά κομμάτια της καμπύλης επειδή αυξάνει η οριζόντια απόσταση (απόσταση στον άξονα x_1) μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων. Έτσι βλέπουμε ότι πάνω στην πρώτη καμπύλη με φορά διαγραφής από δεξιά προς τα αριστερά υπάρχουν 24 σημεία, στην δεύτερη 19, ενώ στις τρεις καμπύλες που σημειώνονται στη συνέχεια 9, 8 και 8 σημεία αντίστοιχα. Όσο η τροχιά απομακρύνεται από την περιοχή εμφάνισης του συντονισμού $\frac{1}{19}$, η απόσταση στον άξονα x_1 δύο διαδοχικών σημείων συνεχώς μεγαλώνει, αλλά κάθε σημείο βρίσκεται αριστερότερα από το προηγούμενό του. Έτσι κάποια στιγμή θα υπάρχουν μόνο 2 σημεία στην καμπύλη με φορά διαγραφής από δεξιά προς τα αριστερά. Περαιτέρω αύξηση της

απόστασης δύο διαδοχικών σημείων, θα έχει ως αποτέλεσμα, ενώ ένα σημείο να βρίσκεται στην πραγματικότητα αριστερότερα από το προηγούμενό του, έξω όμως από το διάστημα $[-\pi, \pi]$ στον άξονα x_1 , λόγω της 2π -περιοδικότητας της συντεταγμένης x_1 να βρεθεί δεξιότερα από το προηγούμενό του. Τότε τα δύο αυτά σημεία ορίζουν μια καμπύλη με φορά από τα αριστερά προς τα δεξιά. Με αυτόν τον τρόπο αλλάζει η φορά των καμπυλών, έτσι ώστε όταν τα σημεία φτάσουν στην περιοχή του συντονισμού $\frac{2}{19}$ οι καμπύλες να έχουν τη σωστή φορά.



Σχήμα B.11 : Η περιοχή του επιπέδου x_1x_2 κοντά στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{19}$. Στο σχήμα σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 19 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Τα διαδοχικά σημεία συνδέονται μεταξύ τους με γραμμές (σε μερικές περιοχές του σχήματος) για να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη μας καμπύλης του συντονισμού $\frac{1}{19}$. Στα πλάγια του σχήματος σημειώνουμε το πλήθος των σημείων που βρίσκονται πάνω σε μερικά τμήματα αυτής της καμπύλης. Οι τιμές των παραμέτρων είναι $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$.

Η διαδικασία που περιγράφαμε ισχύει και για τις 19 καμπύλες που υπάρχουν στην πραγματικότητα. Οι καμπύλες αυτές δε σχεδιάστηκαν στο σχήμα B.11 γιατί αυτό θα γινόταν πολύπλοκο, αν σκεφτεί κανείς ότι ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε τμήματα της καμπύλης που έχουμε σχεδιάσει θα έπρεπε να βρίσκονται άλλες 18 καμπύλες.

Είδαμε λοιπόν ότι η μορφολογία που μας δίνουν οι προβολές των σημείων της τροχιάς, της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1), με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$, στο επίπεδο x_1x_2 , επηρεάζεται δραστικά από τα χαρακτηριστικά της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1). Δημιουργούνται ζώνες συντονισμών, όπου τα σημεία διατάσσονται πάνω σε παραβολικές καμπύλες ως αποτέλεσμα των συντονισμών της διδιάστατης απεικόνισης για $v=0$. Εξετάσαμε επίσης με μεγάλη λεπτομέρεια τον τρόπο με τον οποίο τα σημεία της τροχιάς, δημιουργούν τις καμπύλες των διαφόρων συντονισμών, καθώς και τη μορφή και τη διαμόρφωση αυτών των καμπυλών, καθώς η τροχιά εξελίσσεται διερχόμενη από τις περιοχές διαφόρων συντονισμών. Την ίδια μορφολογία στο επίπεδο x_1x_2 παρουσιάζουν και τροχιές με αρχικές συνθήκες σε οποιοδήποτε σημείο (x_1, x_2) έξω από την κεντρική νησίδα του επίπεδου x_1x_2 (Σχήμα B.4) και οποιοδήποτε σημείο (x_3, x_4)

στο επίπεδο x_3x_4 . Έτσι η μελέτη που κάναμε είναι γενική, αφού δεν αναφέρεται στα χαρακτηριστικά μιας μόνο τροχιάς.

B.3.2. Προβολές στα διάφορα επίπεδα εκτός του επιπέδου x_1x_2 .

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τις προβολές των σημείων της τροχιάς της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1), με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$, σε όλα τα άλλα επίπεδα προβολής εκτός του επιπέδου x_1x_2 . Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τις δομές που δημιουργούνται σε αυτά τα επίπεδα, όταν στο επίπεδο x_1x_2 η τροχιά βρίσκεται στη ζώνη κάποιου συντονισμού $\frac{m}{n}$.

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία η τροχιά περνά από τη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{4}$ στο επίπεδο x_1x_2 . Στο σχήμα B.12 φαίνονται οι προβολές της τροχιάς στα επίπεδα x_1x_2 , x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 , x_2x_4 και x_3x_4 σ' αυτήν την περίπτωση. Στο επίπεδο x_1x_2 (Σχήμα B.12α) έχουν σχηματιστεί 4 καμπύλες, οι οποίες αντιστοιχούν στο συντονισμό $\frac{1}{4}$. Στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 και x_2x_4 (Σχήματα B.12β,γ,δ και ε αντίστοιχα), οι προβολές των σημείων δημιουργούν πολύπλοκες εικόνες. Αν εξετάσουμε τις προβολές σ' αυτά τα επίπεδα για περισσότερες επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1) από τις 2.000 που έχουμε στα παραπάνω σχήματα, οι εικόνες γίνονται πολυπλοκότερες. Αντίθετα στο επίπεδο x_3x_4 τα σημεία φαίνεται να βρίσκονται πάνω σε μια κλειστή ομαλή καμπύλη γύρω από το σημείο $x_3=x_4=0$, το οποίο αντιστοιχεί στην ευσταθή περιοδική τροχιά 1α (Σχέση B.2.2) της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) θέτοντας x_3, x_4 , κ στη θέση των x_1, x_2, v . Στα σχήματα B.13 έχουμε τις ίδιες προβολές με αυτές του σχήματος B.12 μόνο που σχεδιάζουμε ένα σημείο κάθε 20 επαναλήψεις της απεικόνισης. Τα διαδοχικά σημεία που προκύπτουν με την παραπάνω διαδικασία ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα. Παρατηρούμε ότι σ' όλα τα επίπεδα σχηματίζονται ομαλές καμπύλες σε αντίθεση με τις πολύπλοκες εικόνες του σχήματος B.12. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός 20 είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός για τον οποίο έχουμε ομαλές καμπύλες σ' όλα τα επίπεδα προβολής.

Στο σχήμα B.14 φαίνονται οι προβολές της τροχιάς σ' όλα τα δυνατά επίπεδα, όταν η τροχιά βρίσκεται στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{3}$ στο επίπεδο x_1x_2 όπου και σχηματίζονται 3 καμπύλες (Σχήμα B.14α). Οι προβολές των σημείων στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 και x_2x_4 (Σχήματα B.14β,γ,δ και ε αντίστοιχα) δημιουργούν πολύπλοκες εικόνες ενώ στο επίπεδο x_3x_4 (Σχήμα B.14στ) σχηματίζεται πάλι μια ομαλή κλειστή καμπύλη γύρω από το σημείο $x_3=x_4=0$. Σ' αυτήν την περίπτωση σχεδιάζοντας ένα σημείο κάθε 60 επαναλήψεις της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) σχηματίζονται ομαλές καμπύλες σ' όλα τα επίπεδα προβολής (Σχήμα B.15).

Μελετώντας με τον ίδιο τρόπο και άλλους συντονισμούς συμπεραίνουμε ότι, όταν η τροχιά βρίσκεται στη ζώνη ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ στο επίπεδο x_1x_2 , σχεδιάζονται 1 σημείο κάθε j επαναλήψεις της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1), όπου $j \in N^*$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των n και 20, σχηματίζονται ομαλές καμπύλες σ' όλα τα επίπεδα προβολής. Επομένως στο σχήμα B.13 έχουμε ομαλές καμπύλες σ' όλα τα επίπεδα προβολής αφού $20=E.K.P.(4,20)$, ενώ για το σχήμα B.15 έχουμε $60=E.K.P.(3,20)$. Ο αριθμός 20 εμφανίζεται επειδή στη διδιάστατη απεικόνιση (B.2.1) των x_3, x_4 η τιμή της παραμέτρου $\kappa=10^{-1}$ είναι λίγο μεγαλύτερη από την τιμή $\kappa=0,097887$, για την οποία γεννιέται ο συντονισμός $\frac{1}{20}$ διακλαδιζόμενος από την περιοδική τροχιά 1α (Πίνακας B.1). Επομένως η τετραδιάστατη τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ όταν

βρίσκεται κοντά στο σημείο $x_3 = x_4 = 0$ επηρεάζεται κυρίως από τον συντονισμό $\frac{1}{20}$ λόγω της μικρής τιμής της παραμέτρου σύζευξης μ .

Για να αποδείξουμε την επίδραση των συντονισμών της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) στο επίπεδο x_3x_4 , που διακλαδίζονται από την κεντρική περιοδική τροχιά $x_3 = x_4 = 0$, στη μορφολογία των τετραδιάστατων τροχιών της απεικόνισης (B.1.1), μεταβάλλουμε λίγο την τιμή της παραμέτρου κ . Συγκεκριμένα μελετάμε την τετραδιάστατη απεικόνιση όταν $\nu=10^{-3}$, $\kappa=0,11$ και $\mu=10^{-5}$. Από τα στοιχεία του πίνακα B.1, βλέπουμε ότι για $\kappa=0,108366$ ο συντονισμός $\frac{1}{19}$ διακλαδίζεται από την περιοδική τροχιά $x_3 = x_4 = 0$. Επομένως στην τετραδιάστατη απεικόνιση η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ θα πρέπει να επηρεάζεται στο επίπεδο x_3x_4 περισσότερο από το συντονισμό $\frac{1}{19}$ παρά από το συντονισμό $\frac{1}{20}$. Όταν η τροχιά βρίσκεται στην περιοχή του συντονισμού $\frac{1}{4}$ στο επίπεδο x_1x_2 , οι προβολές της στα διάφορα επίπεδα (Σχήμα B.16) δίνουν εικόνες παρόμοιες με αυτές που είχαμε για $\kappa=10^{-1}$ (Σχήμα B.12), ενώ ομαλές καμπύλες σε όλα τα επίπεδα έχουμε όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 76 επαναλήψεις της απεικόνισης, γιατί $E.K.P.(4,19)=76$ (Σχήμα B.17). Στο σχήμα B.18 φαίνονται οι προβολές σ' όλα τα δυνατά επίπεδα όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 20 επαναλήψεις της απεικόνισης αφού $E.K.P.(4,20)=20$. Πάλι βλέπουμε σχεδόν ομαλές καμπύλες σ' όλα τα επίπεδα, οι οποίες όμως είναι σαφώς πολυπλοκότερες σε σχέση με τις καμπύλες στις εικόνες του σχήματος B.17. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η επιρροή του συντονισμού $\frac{1}{19}$ είναι μεγαλύτερη από αυτή του συντονισμού $\frac{1}{20}$.

Μπορούμε να καταλάβουμε ποιος συντονισμός στο επίπεδο x_3x_4 επηρεάζει περισσότερο την τετραδιάστατη τροχιά, εξετάζοντας λίγο περισσότερο την προβολή της σ' αυτό το επίπεδο. Σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε 76 επαναλήψεις της απεικόνισης βλέπουμε ότι στο επίπεδο x_3x_4 σχηματίζεται μια ομαλή καμπύλη, η οποία δεν κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από το σημείο $x_3 = x_4 = 0$ (Σχήμα B.17στ). Αντιθέτως σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε 20 επαναλήψεις της απεικόνισης η καμπύλη που παίρνουμε κάνει τουλάχιστον δύο περιστροφές γύρω από το σημείο $x_3 = x_4 = 0$ (Σχήμα B.18στ). Αυτό σημαίνει ότι η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν δύο διαδοχικά σημεία στο επίπεδο x_3x_4 , αλλάζει πρόσημο περισσότερες φορές όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 20 επαναλήψεις θεωρώντας ότι επηρεάζεται από το συντονισμό $\frac{1}{20}$ παρά όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 76, θεωρώντας ότι επηρεάζεται από το συντονισμό $\frac{1}{19}$. Στο σχήμα B.19 σχεδιάζουμε την κλίση D του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει δύο διαδοχικά σημεία στο επίπεδο x_3x_4 , για την τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ όταν $\nu=10^{-3}$, $\kappa=0,11$, $\mu=10^{-5}$, ως συνάρτηση του πλήθους N των επαναλήψεων της απεικόνισης, όταν στο επίπεδο x_1x_2 εμφανίζεται ο συντονισμός $\frac{1}{4}$. Στο σχήμα B.19a φαίνεται η κλίση όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 18 επαναλήψεις, ενώ στα σχήματα B.19β και B.19γ όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 19 και 20 σημεία αντίστοιχα. Στα σχήματα B.19a και γ, η κλίση αλλάζει πρόσημο πολύ συχνά, επομένως η καμπύλη στο επίπεδο x_3x_4 κάνει αρκετές περιστροφές γύρω από το σημείο $x_3 = x_4 = 0$. Οι λιγότερες αλλαγές προσήμου της τιμής της κλίσης συμβαίνουν όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 19 επαναλήψεις (Σχήμα B.19β).

Η επίδραση του συντονισμού $\frac{1}{19}$ στις προβολές της τετραδιάστατης τροχιάς στο επίπεδο x_3x_4 είναι ανεξάρτητη του συντονισμού από τον οποίο επηρεάζεται η τροχιά στο επίπεδο x_1x_2 . Στο σχήμα B.20 φαίνονται οι προβολές των πρώτων 30.000 σημείων της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ όταν $\nu=10^{-3}$, $\kappa=0,11$ και $\mu=10^{-5}$. Τα

σημεία σχηματίζουν 19 καμπύλες, ενδεικτικό της επίδρασης του συντονισμού $\frac{1}{19}$ αν και στο επίπεδο x_1x_2 η τροχιά περνάει από τις ζώνες πολλών διαφορετικών συντονισμών. Ετσι σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε 19 επαναλήψεις σχηματίζεται μια σχετικά απλή καμπύλη (Σχήμα B.21β). Σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε j επαναλήψεις σχηματίζεται μια σπειροειδής καμπύλη η οποία απομακρύνεται από το κέντρο με αριστερόστροφη φορά όταν $j < 19$ (Σχήμα B.21α για $j=18$) και με δεξιόστροφη φορά όταν $j > 19$ (Σχήμα B.21γ για $j=20$).

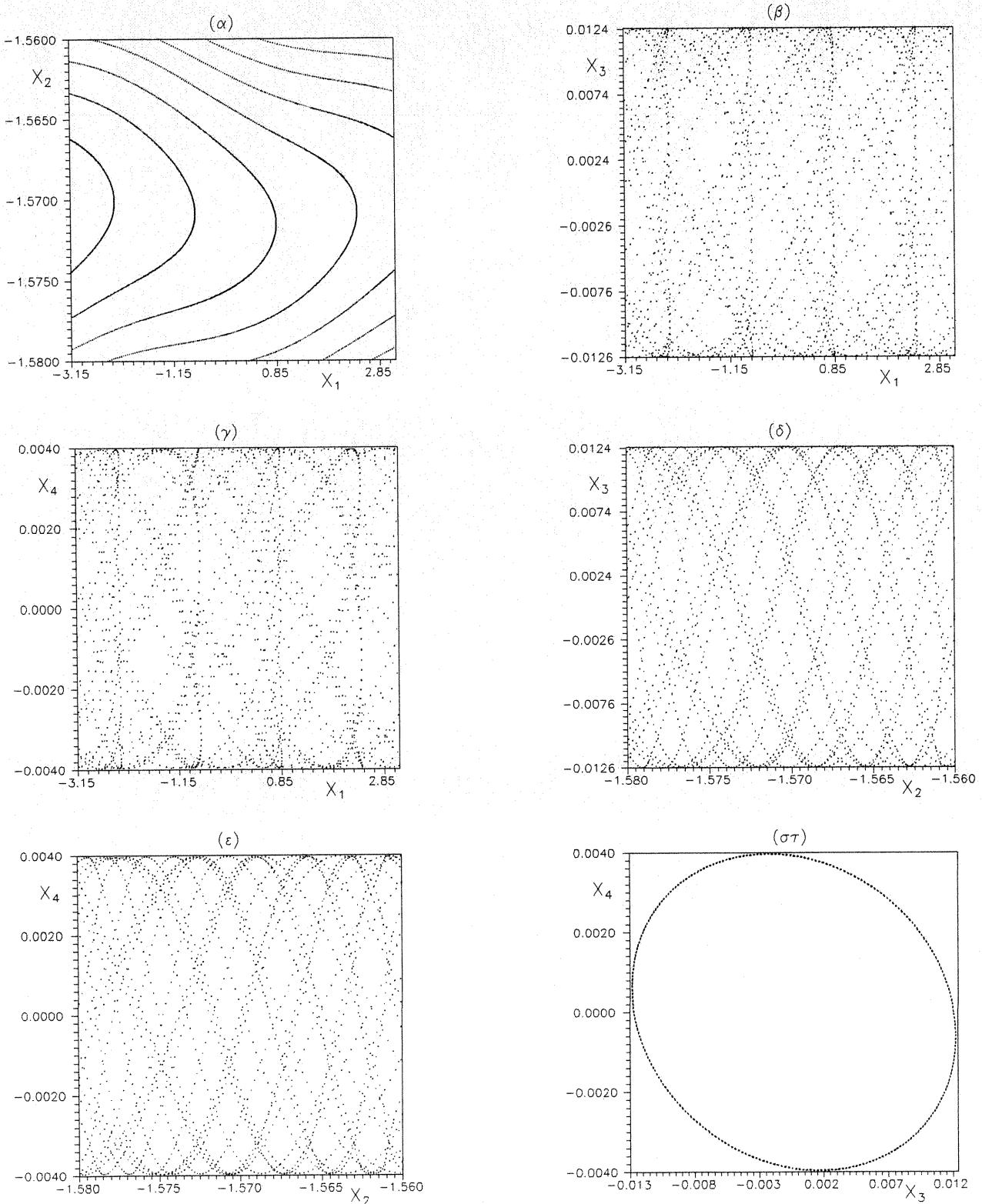
Επομένως όταν η τετραδιάστατη τροχιά βρίσκεται κοντά στο κεντρικό σημείο $x_3 = x_4 = 0$ του επιπέδου x_3x_4 , επηρεάζεται από τους συντονισμούς που υπάρχουν κοντά σ' αυτό το σημείο στη διδιάστατη απεικόνιση (B.2.1) των x_3, x_4 . Η μορφή του συντονισμού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου κ, η οποία συνδέεται με τον αριθμό περιστροφής των τροχιών που διακλαδίζονται από την περιοδική τροχιά $x_3 = x_4 = 0$ της διδιάστατης απεικόνισης. Οι προβολές στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 και x_2x_4 δίνουν πολύπλοκες εικόνες μέσα στις οποίες υπάρχει μια δομή, η οποία εξαρτάται από τους συντονισμούς που επηρεάζουν την τροχιά στα επίπεδα x_1x_2 και x_3x_4 .

B.3.3. Μελέτη του εύρους των ζωνών συντονισμού στο επίπεδο x_1x_2 .

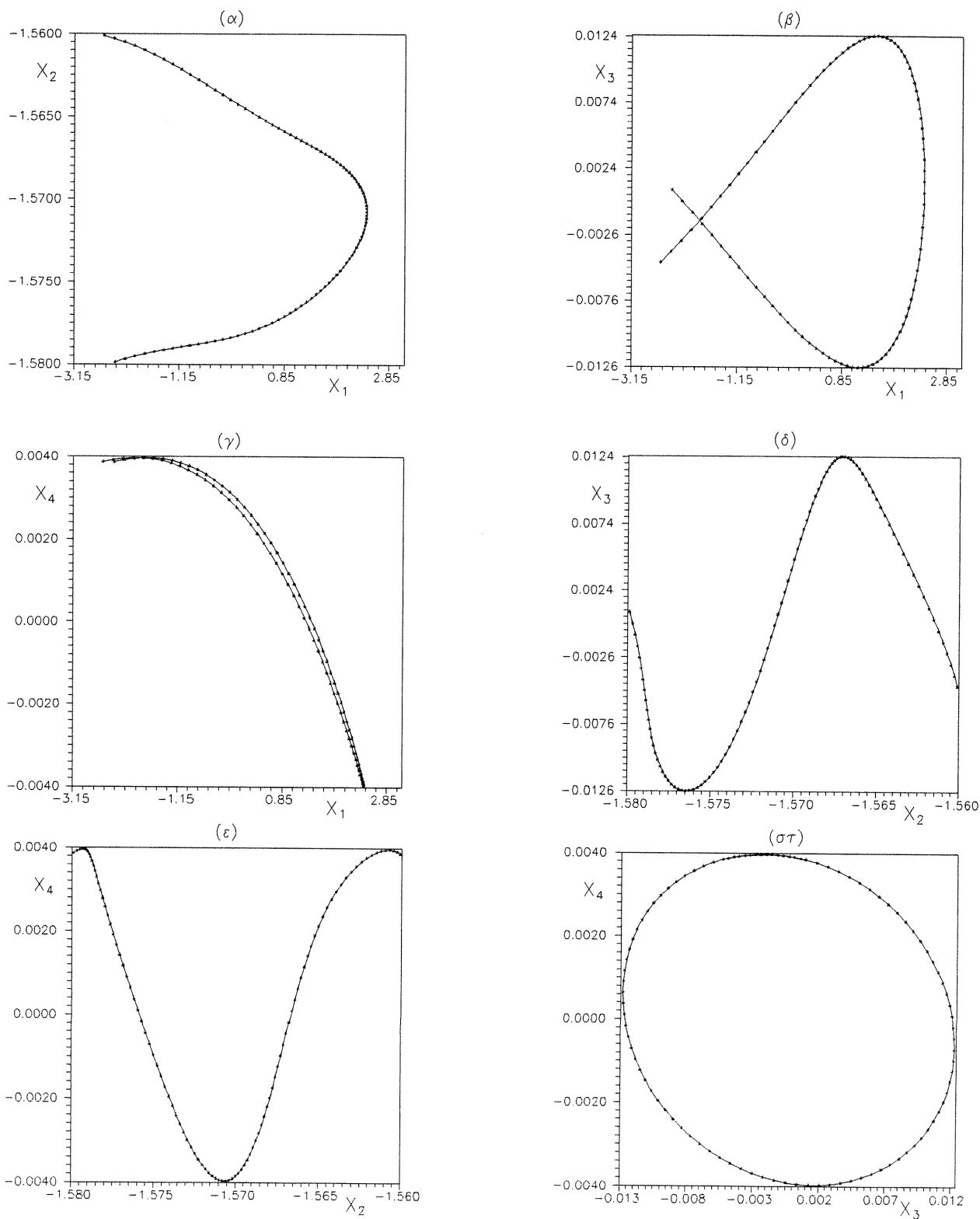
Οπως φαίνεται από τις εικόνες του σχήματος B.5 το εύρος στον άξονα x_2 των ζωνών των διαφόρων συντονισμών δεν είναι σταθερό. Για παράδειγμα στο σχήμα B.5γ βλέπουμε ότι το εύρος της ζώνης του συντονισμού $\frac{2}{19}$ (η σημειωμένη ζώνη που περιέχει 19 καμπύλες) είναι μικρότερο από το εύρος της ζώνης του συντονισμού $\frac{1}{9}$ (η σημειωμένη ζώνη που περιέχει 9 καμπύλες). Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με τη μελέτη της σχέσης του εύρους των ζωνών συντονισμού με το είδος του συντονισμού καθώς και με την παράμετρο σύζευξης μ.

Για να μετρήσουμε εμπειρικά το εύρος των ζωνών διαφόρων συντονισμών στο επίπεδο x_1x_2 , μεγεθύνουμε αρχικά την περιοχή κάθε συντονισμού ώστε να γίνονται πιο ευδιάκριτα τα όρια των αντίστοιχων ζωνών. Θεωρούμε ότι τα όρια αυτά βρίσκονται στο σημείο όπου οι n καμπύλες του κάθε συντονισμού γίνονται σχεδόν οριζόντιες, δηλαδή περίπου παράλληλες στον άξονα x_1 . Η εμπειρική αυτή μέτρηση δεν είναι απόλυτα ακριβής, αφού δεν είναι εύκολος ο σαφής καθορισμός των ορίων κάθε ζώνης συντονισμού, αλλά παρ' όλα αυτά μας οδηγεί σε πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Σημειώνουμε ότι το εύρος των ζωνών των συντονισμών $\frac{m}{n}$ μεγάλης τάξης (μεγάλη τιμή του παρονομαστή n) είναι πολύ μικρό, οπότε ακόμα και αν μεγεθύνουμε την περιοχή εμφάνισης του συντονισμού δεν είναι εύκολο να καθοριστούν τα όρια της ζώνης συντονισμού. Έτσι μετράμε το εύρος ευδιάκριτων ζωνών συντονισμού, οι οποίες έχουν σαφή όρια. Μια άλλη δυσκολία είναι ο προσδιορισμός των ορίων της ζώνης του συντονισμού $\frac{1}{t}$, στον οποίο όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο B.3.1 αντιστοιχεί μια καμπύλη γύρω από την κεντρική νησίδα στο επίπεδο x_1x_2 (Σχήμα B.4). Η ζώνη αυτή είναι παραμορφωμένη λόγω της ύπαρξης της κεντρικής νησίδας με αποτέλεσμα να μην είναι σαφή τα όρια της. Γι' αυτό το λόγο μετράμε εμπειρικά το εύρος των συντονισμών $\frac{m}{n}$ με $n \geq 2$.

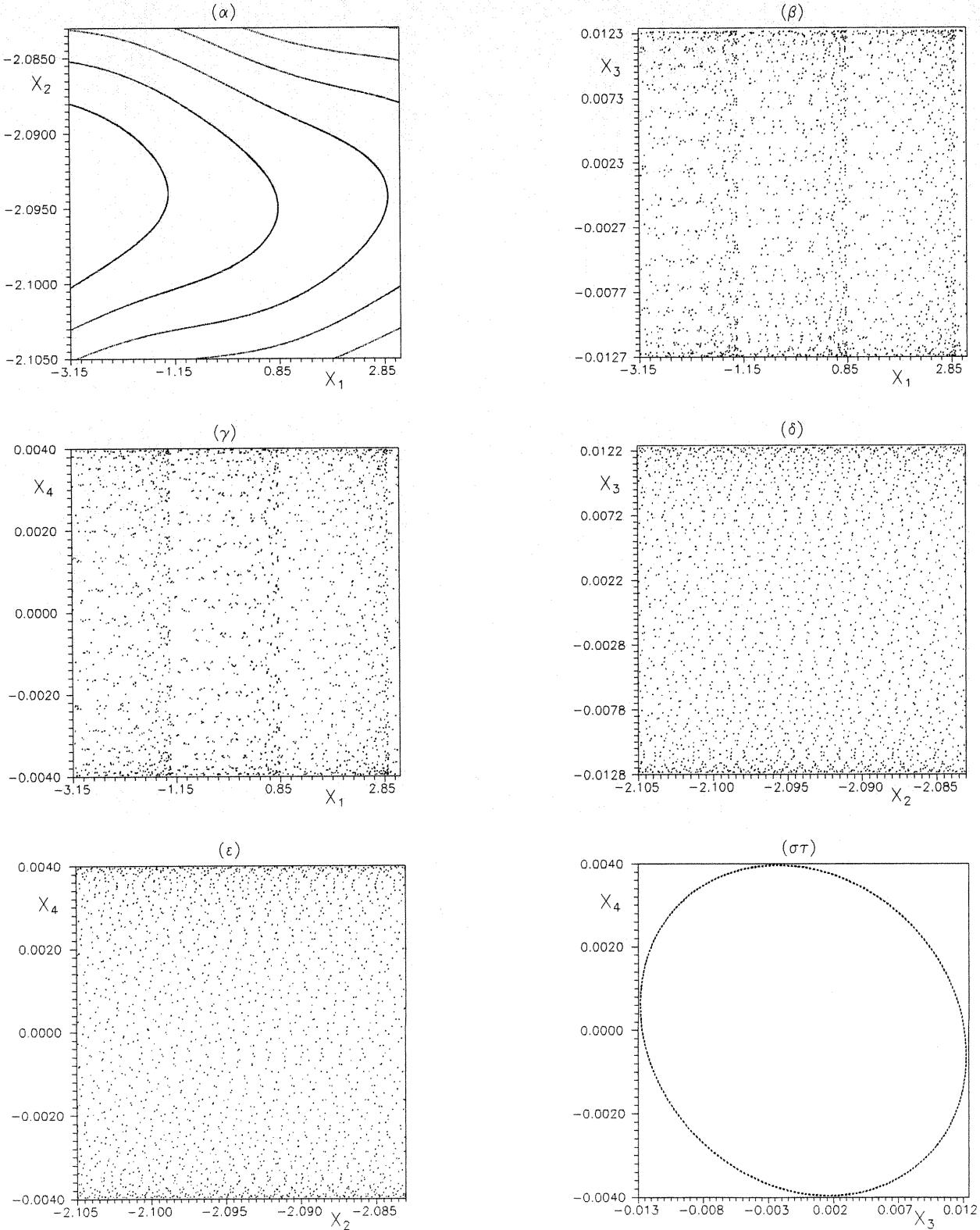
Θα εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση κατά την οποία οι τιμές των παραμέτρων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) είναι $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$. Σ' αυτήν την περίπτωση μετράμε το εύρος στον άξονα x_2 των ζωνών συντονισμού που εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 για όλους τους συντονισμούς $\frac{m}{n}$ με παρονομαστή $2 \leq n \leq 20$. Τα αποτελέσματα



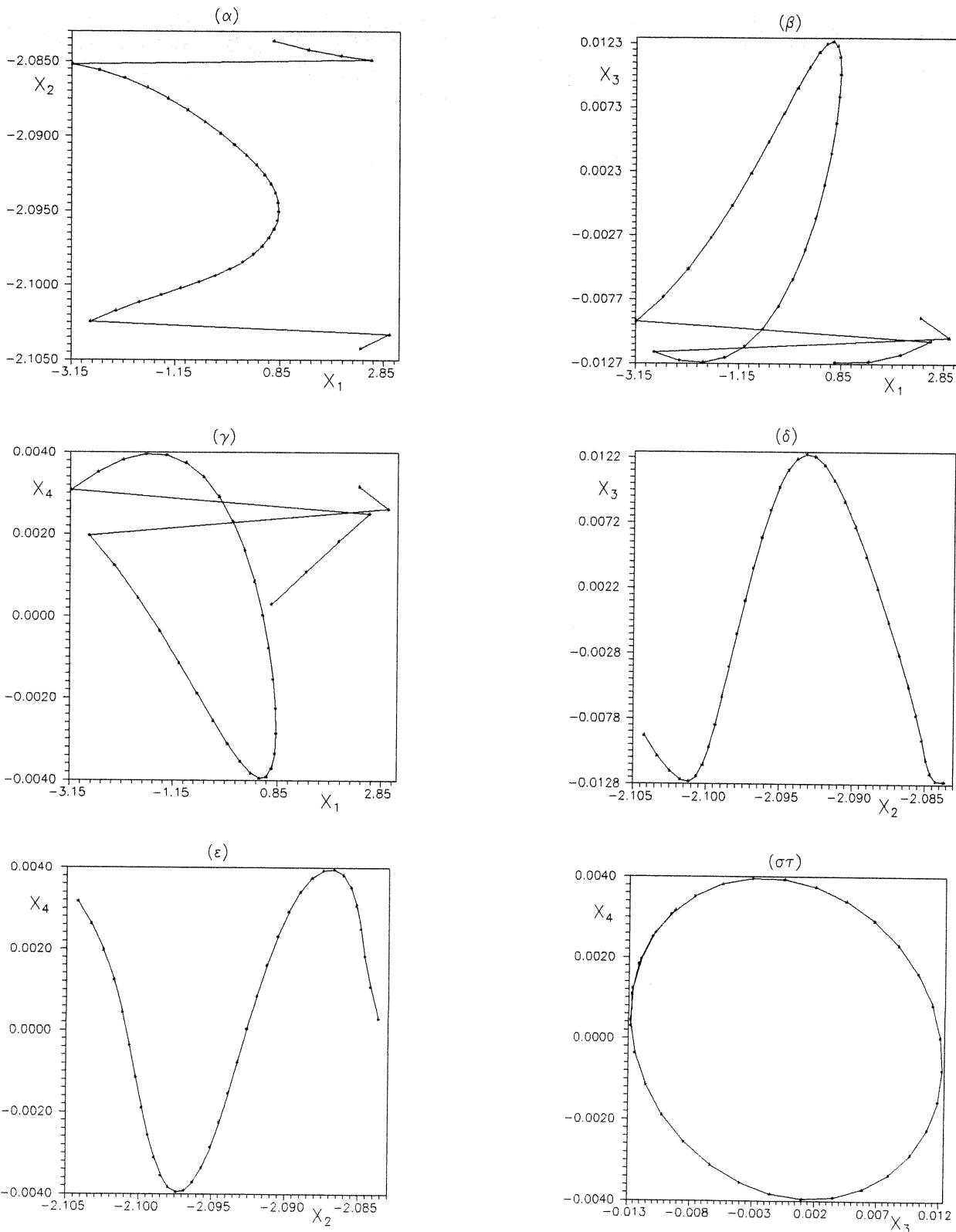
Σχήμα B.12 : Προβολές των σημείων της τροχιάς της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ στα επίπεδα α) x_1x_2 β) x_1x_3 γ) x_1x_4 δ) x_2x_3 ε) x_2x_4 και στ) x_3x_4 , όταν η τροχιά βρίσκεται στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{4}$ στο επίπεδο x_1x_2 . Σε κάθε σχήμα έχουμε 2.000 σημεία. Οι τιμές των παραμέτρων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) είναι $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$.



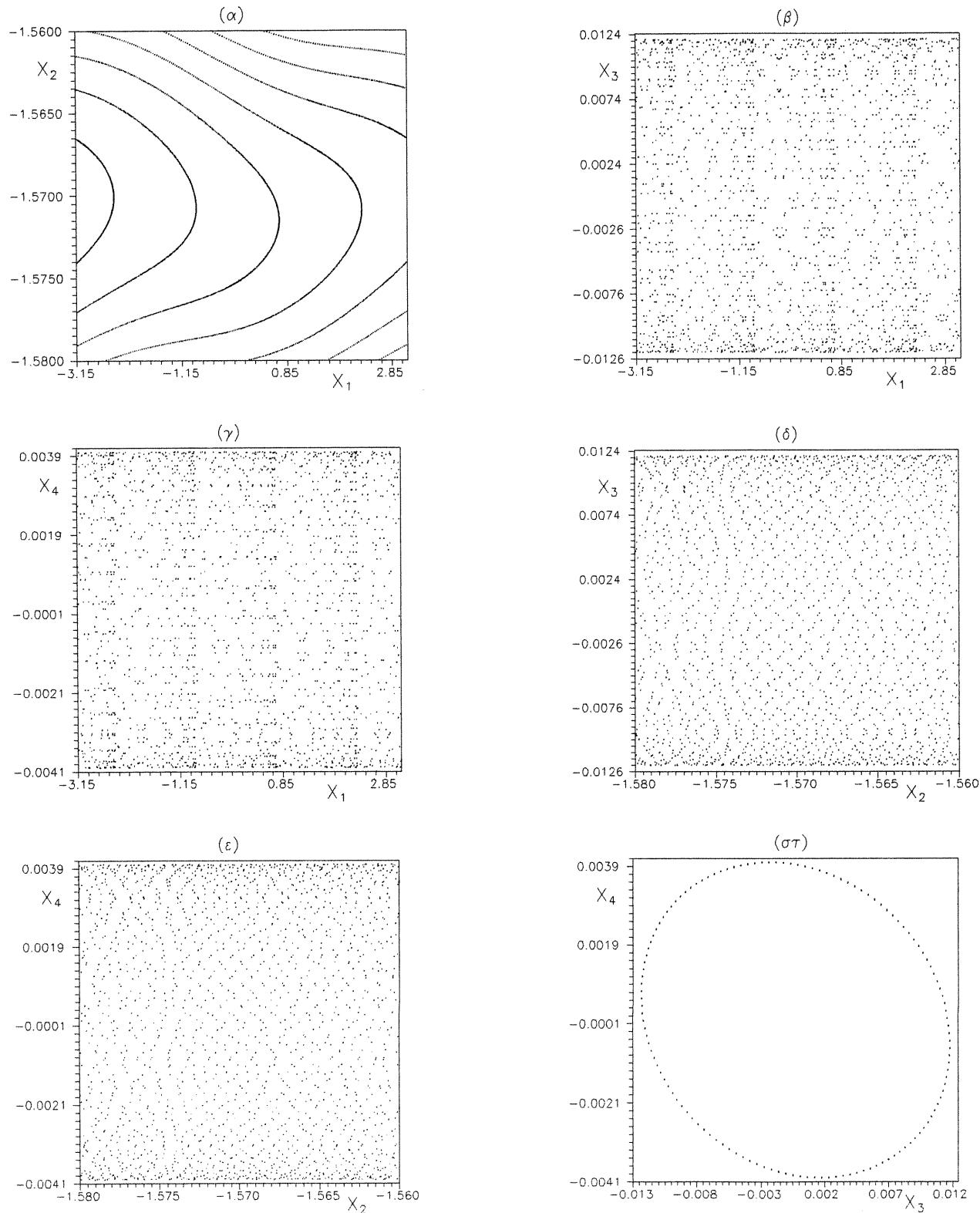
Σχήμα B.13 : Τδια περίπτωση με αυτή του σχήματος B.12 εκτός του ότι σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 20 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Τα διαδοχικά σημεία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζοντας ομαλές καμπύλες σε όλα τα επίπεδα προβολής.



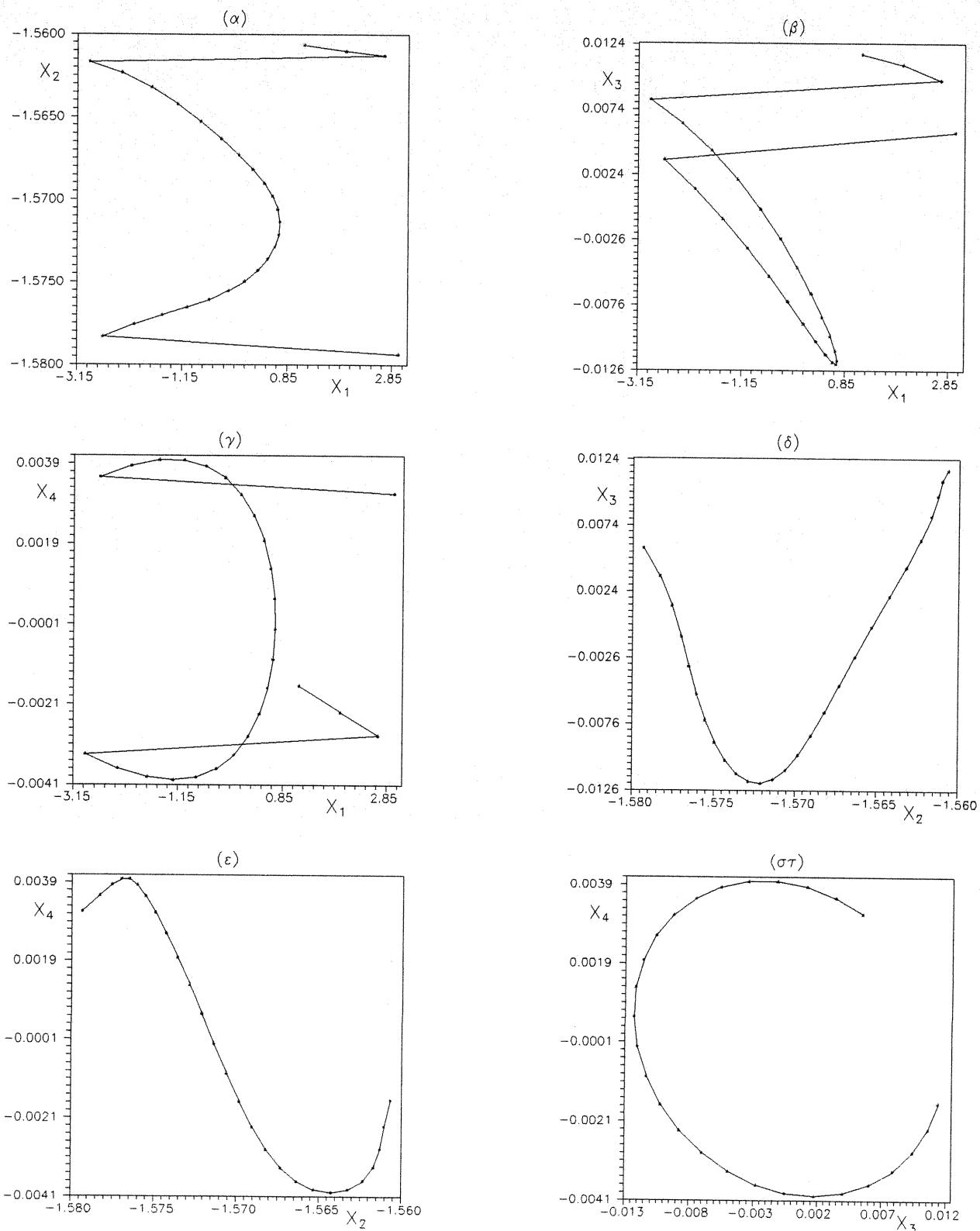
Σχήμα B.14 : Προβολές των σημείων της τροχιάς της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ σε όλα τα δυνατά επίπεδα, όταν η τροχιά βρίσκεται στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{3}$ στο επίπεδο x_1x_2 . Οι τιμές των παραμέτρων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) είναι $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$.



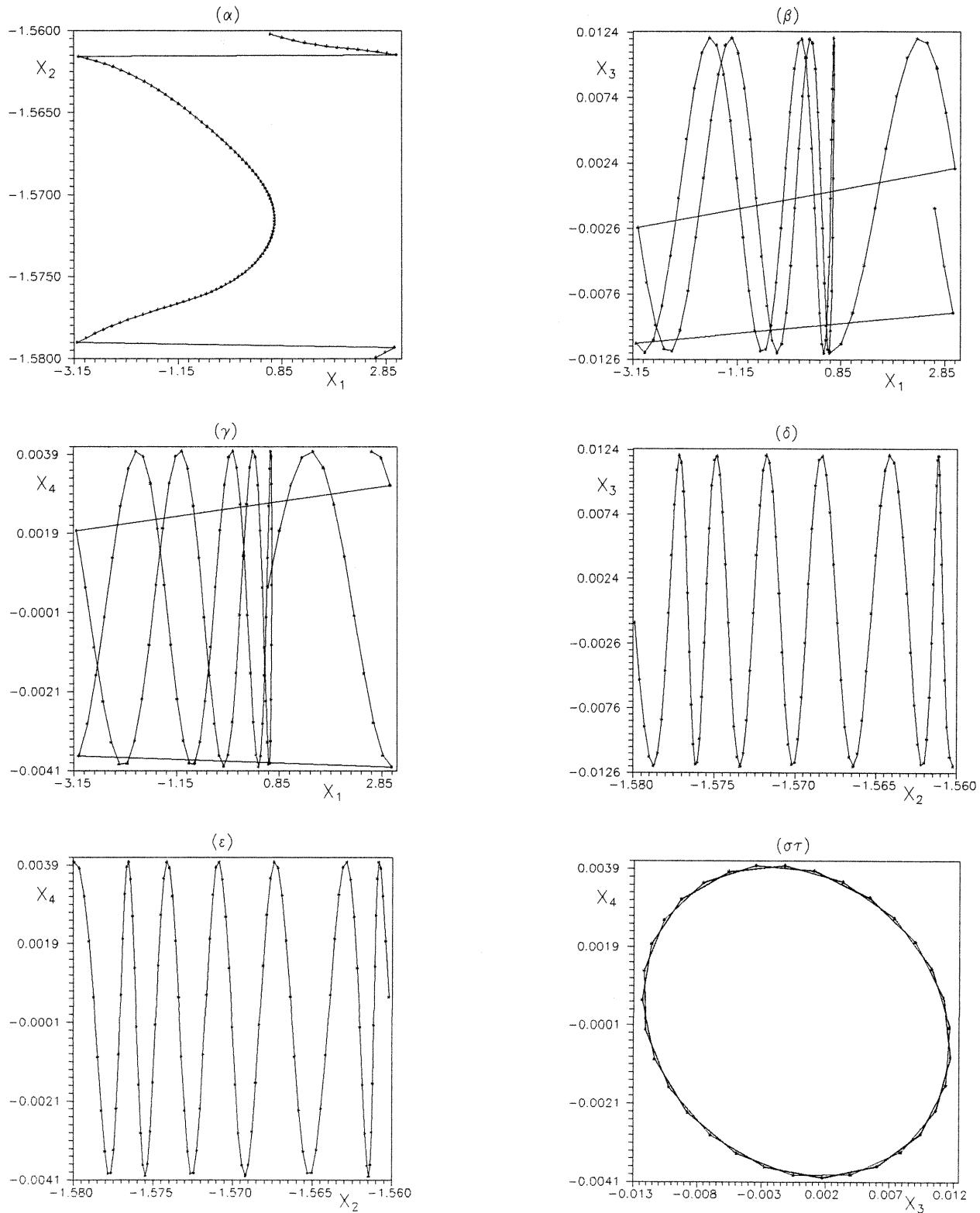
Σχήμα B.15 : Ίδια περίπτωση με αυτή του σχήματος B.14 εκτός του ότι σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 60 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Τα διαδοχικά σημεία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζοντας ομαλές καμπύλες σε όλα τα επίπεδα προβολής. Στα επίπεδα x_1x_2 , x_1x_3 και x_1x_4 οι καμπύλες παρουσιάζουν ασυνέχειες λόγω της 2π -περιοδικότητας (mod 2π) της συντεταγμένης x_1 .



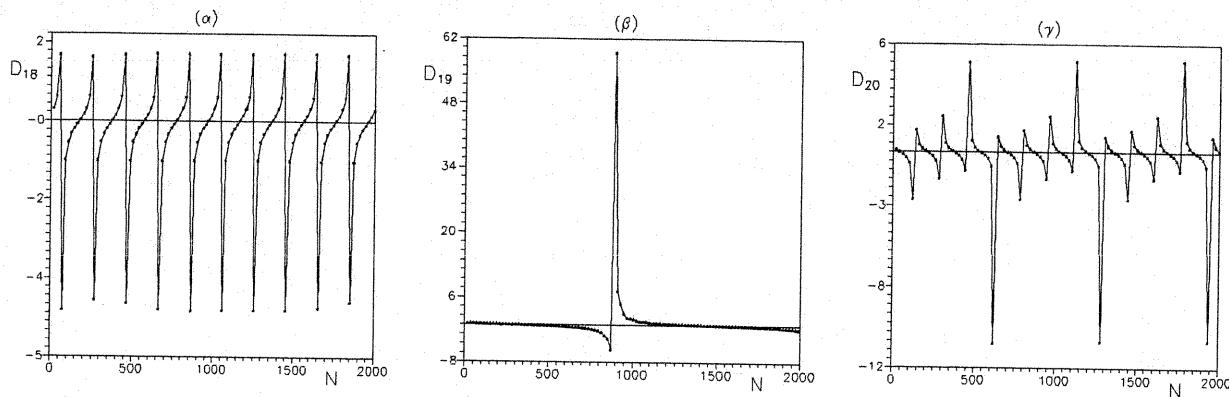
Σχήμα B.16 : Προβολές των σημείων της τροχιάς της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ σε όλα τα δυνατά επίπεδα, όταν η τροχιά βρίσκεται στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{4}$ στο επίπεδο x_1x_2 . Οι τιμές των παραμέτρων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) είναι $v=10^{-3}$, $\kappa=0,11$ και $\mu=10^{-5}$.



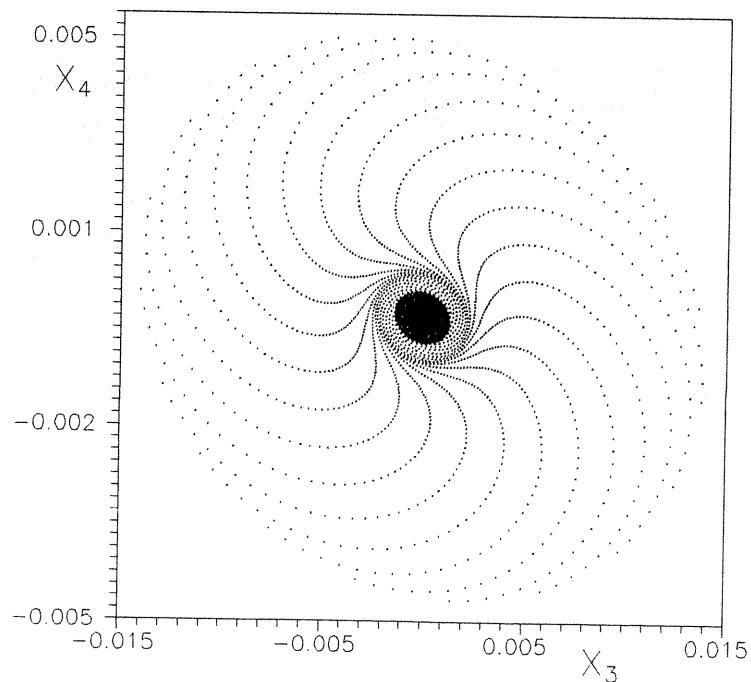
Σχήμα B.17 : Τδια περίπτωση με αυτή του σχήματος B.16 εκτός του ότι σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 76 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Τα διαδοχικά σημεία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζοντας ομαλές καμπύλες σε όλα τα επίπεδα προβολής. Στα επίπεδα x_1x_2 , x_1x_3 και x_1x_4 οι καμπύλες παρουσιάζουν ασυνέχειες λόγω της 2π -περιοδικότητας (mod 2π) της συντεταγμένης x_1 .



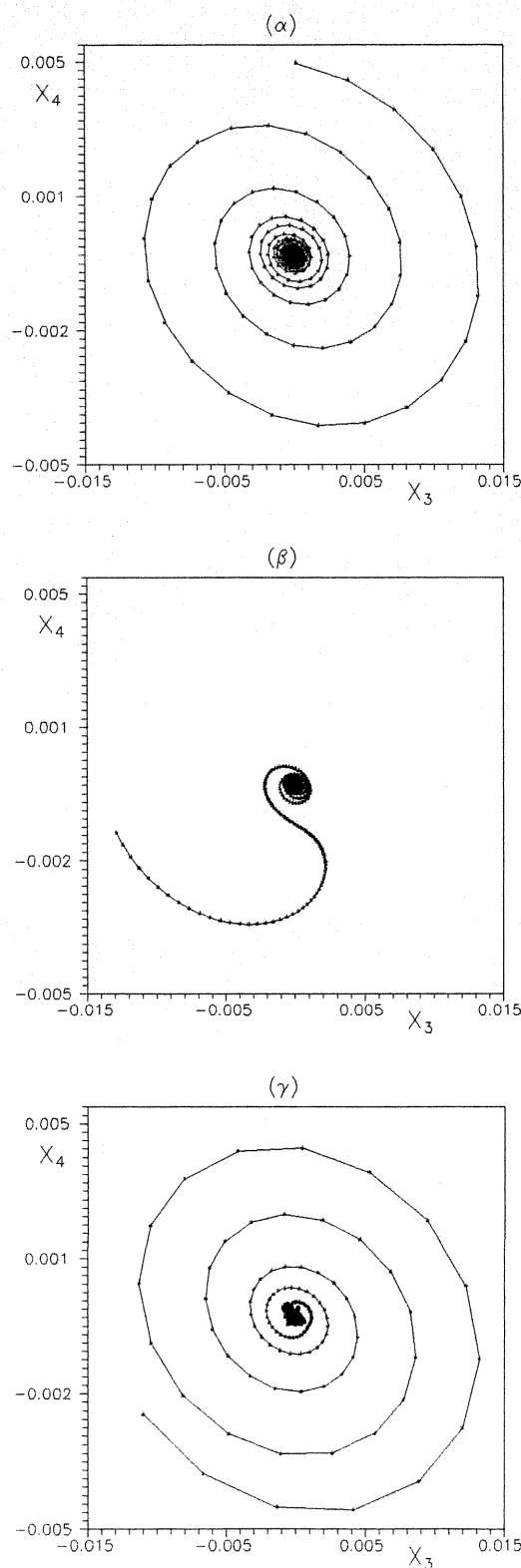
Σχήμα B.18 : Ήδα περίπτωση με αυτή του σχήματος B.16 εκτός του ότι σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε 20 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Τα διαδοχικά σημεία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζοντας ομαλές καμπύλες σε όλα τα επίπεδα προβολής. Στα επίπεδα x_1x_2 , x_1x_3 και x_1x_4 οι καμπύλες παρουσιάζουν ασυνέχειες λόγω της 2π -περιοδικότητας ($\text{mod } 2\pi$) της συντεταγμένης x_1 .



Σχήμα B.19 : Η κλίση D του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν δύο διαδοχικά σημεία στο επίπεδο x_3x_4 , σχεδιάζοντας 1 σημείο κάθε α)18 β)19 και γ)20 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1), για την τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ όταν $\nu=10^{-3}$, $\kappa=0,11$ και $\mu=10^{-5}$ ως συνάρτηση του πλήθους N των επαναλήψεων. Σημειώνουμε ότι στο επίπεδο x_1x_2 εμφανίζεται ο συντονισμός $\frac{1}{4}$. Στα σχήματα σημειώνεται και ο άξονας $D=0$.



Σχήμα B.20 : Προβολή των πρώτων 30.000 σημείων της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ στο επίπεδο x_3x_4 , όταν $\nu=10^{-3}$, $\kappa=0,11$ και $\mu=10^{-5}$. Η τροχιά ξεκινάει από το σημείο $x_3=x_4=0$ και απομακρύνεται από αυτό, παραμένοντας όμως συνεχώς σε μια μακρή περιοχή γύρω του, επηρεαζόμενη από το συντονισμό $\frac{1}{19}$.



Σχήμα B.21 : Ιδια περίπτωση με αυτή του σχήματος B.20 εκτός του ότι σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε α)18 β)19 και γ)20 επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Τα διαδοχικά σημεία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζοντας σπειροειδείς καμπύλες οι οποίες απομακρύνονται από το κέντρο $x_3 = x_4 = 0$.

αυτής της μέτρησης είναι συγκεντρωμένα στον πίνακα B.2, όπου σημειώνουμε το εύρος (W) των ζωνών συντονισμού που αντιστοιχούν σε ανάγωγα κλάσματα $\frac{m}{n}$. Έτσι για παράδειγμα ο συντονισμός $\frac{2}{8}$ ταυτίζεται με τον $\frac{1}{4}$.

m	n	W	m	n	W	m	n	W	m	n	W
1	20	0,0084	3	14	0,0122	6	7	0,0269	11	19	0,0082
1	19	0,0095	3	13	0,0132	7	20	0,0084	11	18	0,0091
1	18	0,0105	3	11	0,0169	7	19	0,0081	11	17	0,0091
1	17	0,0089	3	10	0,0176	7	18	0,0093	11	16	0,0093
1	16	0,0103	3	8	0,0213	7	17	0,0105	11	15	0,0117
1	15	0,0118	3	7	0,0240	7	16	0,0095	11	14	0,0125
1	14	0,0110	3	5	0,0371	7	15	0,0110	11	13	0,0144
1	13	0,0130	3	4	0,0443	7	13	0,0130	11	12	0,0140
1	12	0,0127	4	19	0,0079	7	12	0,0141	12	19	0,0080
1	11	0,0154	4	17	0,0089	7	11	0,0142	12	17	0,0105
1	10	0,0176	4	15	0,0122	7	10	0,0170	12	13	0,0128
1	9	0,0170	4	13	0,0128	7	9	0,0192	13	20	0,0085
1	8	0,0201	4	11	0,0142	7	8	0,0213	13	19	0,0096
1	7	0,0240	4	9	0,0206	8	19	0,0084	13	18	0,0091
1	6	0,0272	4	7	0,0253	8	17	0,0091	13	17	0,0107
1	5	0,0370	4	5	0,0331	8	15	0,0120	13	16	0,0105
1	4	0,0489	5	19	0,0095	8	13	0,0121	13	15	0,0107
1	3	0,0614	5	18	0,0091	8	11	0,0142	13	14	0,0111
1	2	0,0948	5	17	0,0108	8	9	0,0175	14	19	0,0094
2	19	0,0078	5	16	0,0108	9	20	0,0071	14	17	0,0105
2	17	0,0079	5	14	0,0135	9	19	0,0093	14	15	0,0122
2	15	0,0103	5	13	0,0142	9	17	0,0089	15	19	0,0094
2	13	0,0118	5	12	0,0142	9	16	0,0093	15	17	0,0105
2	11	0,0140	5	11	0,0155	9	14	0,0122	15	16	0,0122
2	9	0,0191	5	9	0,0190	9	13	0,0131	16	19	0,0079
2	7	0,0255	5	8	0,0216	9	11	0,0155	16	17	0,0089
2	5	0,0353	5	7	0,0241	9	10	0,0164	17	20	0,0088
2	3	0,0578	5	6	0,0287	10	19	0,0071	17	19	0,0081
3	20	0,0073	6	19	0,0101	10	17	0,0116	17	18	0,0108
3	19	0,0081	6	17	0,0122	10	13	0,0144	18	19	0,0096
3	17	0,0103	6	13	0,0128	10	11	0,0154	19	20	0,0084
3	16	0,0101	6	11	0,0169	11	20	0,0073			

Πίνακας B.2 : Οι τιμές του εύρους W των ζωνών των συντονισμών $\frac{m}{n}$, με παρονομαστές από 2 ως και 20. Οι τιμές των παραμέτρων, της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1), είναι $v=10^{-3}$, $\kappa=10^{-1}$ και $\mu=10^{-5}$. Τονίζουμε ότι σημειώνονται τα αποτελέσματα μόνο για τα ανάγωγα κλάσματα $\frac{m}{n}$.

Στο σχήμα B.22 σχεδιάζουμε το εύρος W των ζωνών των διαφόρων συντονισμών $\frac{m}{n}$ συναρτήσει του λόγου $\frac{m}{n}$, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του πίνακα B.2. Έχουμε επίσης σημειώσει τα σημεία τα οποία αντιστοιχούν σε ορισμένους συντονισμούς χαμηλής τάξης, δηλαδή σε συντονισμούς οι παρονομαστές των οποίων παίρνουν σχετικά χαμηλές τιμές. Βλέπουμε ότι τα σημεία δημιουργούν μια συγκεκριμένη δομή ενώ είναι φανερή μια συμμετρία ως προς τον άξονα $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε επίσης ότι το εύρος των ζωνών των

συντονισμών υψηλής τάξης είναι μικρότερο από αυτό των συντονισμών με μικρούς σχετικά παρονομαστές. Επίσης συντονισμοί με τον ίδιο παρονομαστή έχουν πρακτικά το ίδιο εύρος, γιατί όπως φαίνεται από το σχήμα B.22 συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία που αντιστοιχούν σε συντονισμούς $\frac{m}{n}$ με τους ίδιους παρονομαστές (συγκεκριμένα για $n=5, 7, 15$ και 20) σχηματίζονται σχεδόν οριζόντια τμήματα. Για να εδραιώσουμε αυτόν τον ισχυρισμό βρίσκουμε αριθμητικά την ευθεία, η οποία προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία του σχήματος B.22 για τον ίδιο παρονομαστή n . Η ευθεία έχει τη μορφή :

$$W = a_1 \cdot \left(\frac{m}{n} \right) + a_2 \quad (B.3.3.1),$$

όπου $a_1, a_2 \in R$. Σημειώνουμε ότι όλες οι προσεγγίσεις αριθμητικών δεδομένων από διάφορες συναρτησιακές σχέσεις, που εμφανίζονται στην παρούσα εργασία, γίνονται με τη βοήθεια του προγράμματος γραφικών GRAPHER. Αν το εύρος των ζωνών των συντονισμών είναι ανεξάρτητο της τιμής του αριθμητή m θα πρέπει η κλίση της ευθείας (B.3.3.1) να είναι 0 ($a_1=0$). Στον πίνακα B.3 σημειώνουμε τις τιμές της κλίσης a_1 για όλες τις τιμές του παρονομαστή n , καθώς και το πλήθος a_n των συντονισμών που έχουμε για κάθε τιμή του παρονομαστή n . Βλέπουμε ότι οι τιμές της κλίσης a_1 είναι άλλοτε θετικές και άλλοτε αρνητικές αλλά πάντα πολύ κοντά στο 0 . Αυτή η στατιστική διακύμανση των τιμών της κλίσης a_1 γύρω από την τιμή 0 , οφείλεται στην έλλειψη μεγάλης ακρίβειας στην εύρεση του εύρους των διαφόρων ζωνών συντονισμού. Μεγαλύτερες αποκλίσεις από την τιμή 0 έχουμε όταν το πλήθος των συντονισμών με τον ίδιο παρονομαστή είναι μικρό, όπως για παράδειγμα για $n=3$ και $n=4$, όπου έχουμε μόνο δύο συντονισμούς, γιατί σ' αυτήν την περίπτωση τα σφάλματα στην εμπειρική μέτρηση του εύρους των ζωνών συντονισμού έχουν στατιστικά μεγαλύτερη επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα. Συμπεραίνουμε λοιπόν από ότι αναφέραμε μέχρι τώρα, ότι το εύρος της ζώνης του συντονισμού $\frac{m}{n}$ στο επίπεδο $x_1 x_2$ δεν εξαρτάται από την τιμή του αριθμητή m παρά μόνο από την τιμή του παρονομαστή n .

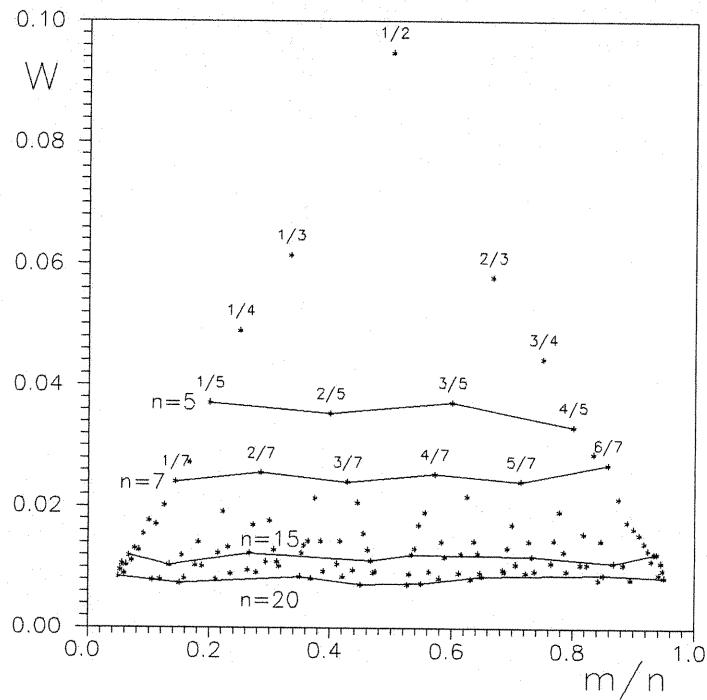
Στο σχήμα B.23 σχεδιάζουμε το εύρος W των ζωνών διαφόρων συντονισμών $\frac{m}{n}$ ως συνάρτηση του παρονομαστή n . Για κάθε τιμή του παρονομαστή n έχουμε ένα πλήθος σημείων, τα οποία αντιστοιχούν στις διαφορετικές τιμές του αριθμητή m . Έχουμε επίσης σχεδιάσει μια καμπύλη της μορφής :

$$W = A \frac{1}{n^B} \quad (B.3.3.2),$$

με

$$A = 0,191, \quad B = 1,049 \quad (B.3.3.3),$$

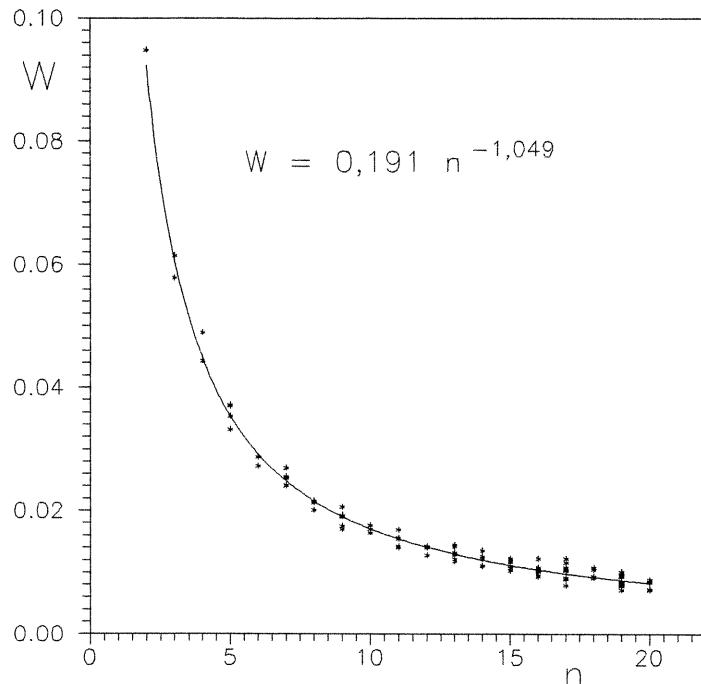
η οποία προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα τα αριθμητικά δεδομένα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, με κάποια ανοχή, το εύρος W της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ στο επίπεδο $x_1 x_2$, είναι σχεδόν αντιστρόφως ανάλογο της τιμής του παρονομαστή n του συντονισμού, αφού η τιμή του εκθέτη B στη σχέση (B.3.3.2) είναι περίπου ίση με τη μονάδα. Η δομή που εμφανίζεται στο σχήμα B.22 είναι απόρροια αυτής ακριβώς της σχέσης. Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι τα σημεία του σχήματος B.22 βρίσκονται σχεδόν πάνω σε κάποιες ευθείες γραμμές, μερικές εκ των οποίων σχεδιάζονται στο σχήμα B.24. Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τον τρόπο σχηματισμού αυτών των γραμμών.



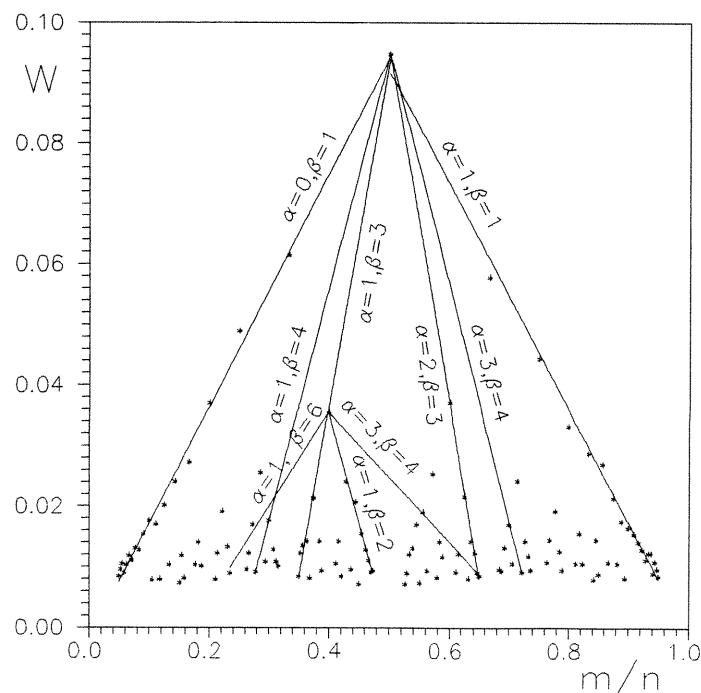
Σχήμα B.22 : Το εύρος W των ζωνών των διαφόρων συντονισμάτων $\frac{m}{n}$, συναρτήσει του λόγου $\frac{m}{n}$. Τα αριθμητικά δεδομένα προέρχονται από τα στοιχεία του πίνακα B.2. Σημειώνονται τα σημεία που αντιστοιχούν σε ορισμένους συντονισμούς μικρής σχετικά τάξης. Τα σημεία που αντιστοιχούν στους συντονισμούς με παρονομαστές 5, 7, 15 και 20 συνδέονται μεταξύ τους με ευθύγραμμα τμήματα. Το εύρος των συντονισμών με τον ίδιο παρονομαστή είναι σχεδόν σταθερό.

n	a_n	a_1	n	a_n	a_1
20	8	0,00079	11	10	-0,00011
19	18	0,00024	10	4	-0,00150
18	6	0,00021	9	6	0,00029
17	16	0,00094	8	4	0,00156
16	8	0,00101	7	6	0,00232
15	8	0,00031	6	2	0,00225
14	6	-0,00010	5	4	-0,00495
13	12	0,00114	4	2	-0,00920
12	4	0,00148	3	2	-0,01080

Πίνακας B.3 : Οι τιμές της κλίσης a_1 , της ευθείας που προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία του σχήματος B.22 που αντιστοιχούν σε συντονισμούς $\frac{m}{n}$ με τον ίδιο παρονομαστή n . Η ευθεία είναι της μορφής $W=a_1(\frac{m}{n})+a_2$. Το πλήθος των ανάγωγων κλασμάτων για κάθε παρονομαστή n είναι a_n . Όλες οι τιμές της κλίσης είναι πολύ κοντά στο 0, οπότε καταλαβαίνουμε ότι το εύρος W των ζωνών των συντονισμών είναι πρακτικά ανεξάρτητο της τιμής του αριθμητή m .



Σχήμα B.23 : Το εύρος W των ζωνών των διαφόρων συντονισμών $\frac{m}{n}$, συναρτήσει του παρονομαστή n , με βάση τα στοιχεία του πίνακα B.2. Για κάθε τιμή του παρονομαστή n έχουμε ένα πλήθος σημείων τα οποία αντιστοιχούν στις διάφορες δυνατές τιμές του αριθμητή m . Έχουμε επίσης σχεδιάσει την καμπύλη $W=0.191n^{-1.049}$ που προσεγγίζει καλύτερα τα αριθμητικά δεδομένα.



Σχήμα B.24 : Ίδια περίπτωση με αυτή του σχήματος B.22 εκτός του ότι σχεδιάζουμε τις ευθείες οι οποίες προσεγγίζουν καλύτερα τα σημεία που αντιστοιχούν σε ορισμένες ακολουθίες συντονισμών της μορφής (B.3.3.4). Οι ακολουθίες αυτές ξεκινούν από τους συντονισμούς $\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{5}$. Σε κάθε ευθεία σημειώνουμε τις τιμές των σταθερών α και β , τις οποίες πρέπει να προσθέτουμε συνεχώς στους αριθμητές και παρονομαστές αντίστοιχα, ώστε να δημιουργηθεί η ακολουθία.

Θεωρούμε την ακολουθία συντονισμών :

$$\frac{m}{n}, \frac{m+\alpha}{n+\beta}, \frac{m+2\alpha}{n+2\beta}, \dots \quad (\text{B.3.3.4}),$$

όπου m, n, α, β , σταθερές ποσότητες, τέτοιες ώστε $m, n, \beta \in N^*$, $\alpha \in N$, $m < n$ και $0 \leq \alpha \leq \beta$. Θα δείξουμε ότι τα σημεία αυτών των συντονισμών βρίσκονται σχεδόν πάνω σε μια ευθεία γραμμή στο σχήμα B.24 της μορφής :

$$W = K \cdot \left(\frac{m}{n} \right) + L \quad (\text{B.3.3.5}),$$

με $K, L \in R$. Από τη μορφή της ακολουθίας συντονισμών (B.3.3.4) βλέπουμε ότι κάθε συντονισμός έχει μεγαλύτερο παρονομαστή από τον προηγούμενο του άρα έχει μικρότερο εύρος οπότε το σημείο που ορίζει στο σχήμα B.24 βρίσκεται πιο κοντά στον οριζόντιο άξονα. Η ποσότητα $m\beta - n\alpha$ καθορίζει αν η ακολουθία (B.3.3.4) είναι αύξουσα ή φθίνουσα αφού :

$$\frac{m}{n} - \frac{m+\alpha}{n+\beta} = \frac{m\beta - n\alpha}{n(n+\beta)} \begin{cases} > 0 \text{ αν } m\beta - n\alpha > 0 \Rightarrow & \text{η ακολουθία (B.3.3.4) είναι φθίνουσα} \\ & \\ < 0 \text{ αν } m\beta - n\alpha < 0 \Rightarrow & \text{η ακολουθία (B.3.3.4) είναι αύξουσα} \end{cases}$$

οπότε είναι φανερό ότι :

$$\begin{aligned} m\beta - n\alpha > 0 &\Rightarrow K > 0 \\ m\beta - n\alpha < 0 &\Rightarrow K < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3.3.6}).$$

Οι τιμές των σταθερών K και L μπορούν να υπολογιστούν με δύο τρόπους :

1) Χρησιμοποιώντας τις πραγματικές τιμές των σημείων του σχήματος B.24, όπως δίνονται στον πίνακα B.2 και βρίσκοντας αριθμητικά την ευθεία της μορφής (B.3.3.5) η οποία προσεγγίζει καλύτερα αυτά τα σημεία, και

2) Θεωρώντας ότι το εύρος W των ζωνών συντονισμού δίνεται από τη σχέση (B.3.3.2) με $A=0,191$ (την πραγματική τιμή που βρήκαμε αριθμητικά (Σχέση B.3.3.3)) και $B=1$ (επειδή όπως έχουμε αναφέρει το εύρος είναι σχεδόν αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή του συντονισμού). Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρητικά τις τιμές των K και L της σχέσης (B.3.3.5). Αυτές οι τιμές θα αναφέρονται ως K_1 και L_1 . Αφού ο πρώτος συντονισμός της ακολουθίας (B.3.3.4) έχει θεωρητικά εύρος $\frac{A}{n}$ και ο επόμενος $\frac{A}{n+\beta}$, οι σταθερές K_1 και L_1 δίνονται από τις σχέσεις :

$$K_1 = \frac{\frac{A}{n} - \frac{A}{n+\beta}}{\frac{m}{n} - \frac{m+\alpha}{n+\beta}} \Rightarrow K_1 = \frac{\beta}{m\beta - n\alpha} \cdot A \quad (\text{B.3.3.7})$$

και

$$\frac{A}{n} = \frac{\beta A}{m\beta - n\alpha} \cdot \frac{m}{n} + L_1 \Rightarrow L_1 = -\frac{\alpha}{m\beta - n\alpha} \cdot A \quad (\text{B.3.3.8}).$$

Στις ίδιες τιμές των σταθερών K_1 και L_1 καταλήγουμε χρησιμοποιώντας οποιουσδήποτε δύο συντονισμούς της ακολουθίας (B.3.3.4).

Στους πίνακες B.4 σημειώνουμε τις τιμές των K , L , K_1 , L_1 για τις ευθείες που αντιστοιχούν στις ακολουθίες συντονισμών της μορφής (B.3.3.4) που ξεκινούν με το συντονισμό $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ (Πίνακα B.4a) και το συντονισμό $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$ (Πίνακας B.4β), για όλες τις δυνατές τιμές των α και β . Παρατηρούμε ότι η συμφωνία των τιμών των K , K_1 και L , L_1 είναι πολύ καλή, γιατί η επί τοις εκατό διαφορά των δύο τιμών σε κάθε περίπτωση :

$$100 \cdot \left| \frac{K - K_1}{K_1} \right| \quad \text{και} \quad 100 \cdot \left| \frac{L - L_1}{L_1} \right| \quad (\text{B.3.3.9}),$$

είναι σχεδόν πάντα κάτω από 5% για την ακολουθία συντονισμών που ξεκινά από το συντονισμό $\frac{1}{2}$ και κάτω από 10% για την ακολουθία που ξεκινά από το συντονισμό $\frac{2}{5}$. Υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις, στις οποίες οι επί τοις εκατό διαφορές (B.3.3.9) είναι μεγαλύτερες, αλλά αυτό συμβαίνει όταν υπάρχουν λίγοι συντονισμοί στην ακολουθία. Για παράδειγμα στην περίπτωση $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, $\alpha=1$ και $\beta=9$ η επί τοις εκατό διαφορά των τιμών L και L_1 είναι περίπου 15%, αλλά στη συγκεκριμένη ακολουθία συντονισμών έχουμε μόνο 3 συντονισμούς. Για τον ίδιο λόγο οι ποσοστιαίες διαφορές είναι μεγαλύτερες στον πίνακα B.4β, σε σχέση με τις τιμές του πίνακα B.4a, γιατί στις ακολουθίες συντονισμών που ξεκινούν από το συντονισμό $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$ υπάρχουν συνήθως μόνο 2 ή 3 συντονισμοί.

Ευθείες της μορφής (B.3.3.5), οι οποίες αντιστοιχούν σε μερικές ακολουθίες συντονισμών των πινάκων B.4, οι συντελεστές K και L των οποίων έχουν υπολογιστεί έτσι ώστε να προσεγγίζουν καλύτερα τα αριθμητικά δεδομένα (σύμφωνα με τη μέθοδο 1 που αναφέραμε προηγουμένως), σχεδιάζονται στο σχήμα B.24. Πάνω από κάθε ευθεία σημειώνονται επίσης οι τιμές των σταθερών α και β . Έτσι για $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ και $\alpha=0$, $\beta=1$ έχουμε μια ακολουθία 19 συντονισμών :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{20},$$

ενώ για $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ και $\alpha=3$, $\beta=4$ έχουμε μια ακολουθία μόνο 3 συντονισμών :

$$\frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{13}{18},$$

γιατί στην ακολουθία παραμένουν μόνο τα ανάγωγα κλάσματα της σειράς :

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{7}{10}, \frac{10}{14}, \frac{13}{18}.$$

Στο σχήμα B.24 σχεδιάζονται επίσης και ευθείες που αντιστοιχούν σε ακολουθίες συντονισμών, οι οποίες ξεκινούν από το συντονισμό $\frac{2}{5}$.

Από τις ευθείες που σημειώνονται στο σχήμα B.24 η ευθεία που αντιστοιχεί στην ακολουθία συντονισμών με $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ και $\alpha=1$, $\beta=1$, παρουσιάζει τη χειρότερη σύμπτωση με τα αριθμητικά δεδομένα αφού τα ποσοστιαία σφάλματα στον υπολογισμό του συντελεστή διεύθυνσης K (2,6%) και του σταθερού όρου L (3,1%) είναι μεγαλύτερα από ότι για τις άλλες ευθείες.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως η υπόθεση, ότι το εύρος W της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$, είναι περίπου αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n , είναι ικανοποιητική αφού με αυτή καταφέρνουμε να προσεγγίσουμε πολύ καλά τη δομή που παρουσιάζεται στο σχήμα B.24 και επιπροσθέτως η πραγματική τιμή του εκθέτη B (Σχέση B.3.3.3) είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Παρότι το αποτέλεσμα αυτό βασίστηκε στα αριθμητικά δεδομένα που είχαμε για τις ζώνες των συντονισμών $\frac{m}{n}$ με παρονομαστές $n \leq 20$, θα δείξουμε στη συνέχεια ότι πρακτικά ισχύει για όλους τους συντονισμούς στο επίπεδο $x_1 x_2$.

α	β	n^*	K	K_1	L	L_1	Πίνακας B.4α		
							Ποσοστιαίες διαφορές		
							100. $\left \frac{K - K_1}{K_1} \right $	100. $\left \frac{L - L_1}{L_1} \right $	
0	1	19	0,193	0,191	-0,002	0,000	1,047	—	
1	1	19	-0,186	-0,191	0,185	0,191	2,618	3,141	
1	3	7	0,572	0,573	-0,192	-0,191	0,175	0,524	
2	3	7	-0,582	-0,573	0,386	0,382	1,571	1,047	
1	4	3	0,386	0,382	-0,098	-0,096	1,047	2,083	
3	4	3	-0,387	-0,382	0,288	0,287	1,309	0,348	
1	5	3	0,324	0,318	-0,067	-0,064	1,887	4,688	
2	5	4	0,965	0,955	-0,388	-0,382	1,047	1,571	
3	5	4	-0,957	-0,955	0,573	0,573	0,209	0,000	
4	5	3	-0,321	-0,318	0,255	0,255	0,943	0,000	
1	6	2	0,289	0,287	-0,050	-0,048	0,697	4,167	
5	6	2	-0,288	-0,287	0,239	0,239	0,348	0,000	
1	7	3	0,272	0,267	-0,041	-0,038	1,873	7,895	
2	7	2	0,448	0,446	-0,129	-0,127	0,448	1,575	
3	7	3	1,354	1,337	-0,582	-0,573	1,272	1,571	
4	7	3	-1,367	-1,337	0,778	0,764	2,244	1,832	
5	7	2	-0,456	-0,446	0,323	0,318	2,242	1,572	
6	7	3	-0,271	-0,267	0,230	0,229	1,498	0,437	
3	8	2	0,770	0,764	-0,290	-0,287	0,785	1,045	
5	8	2	-0,771	-0,764	0,480	0,478	0,916	0,418	
1	9	3	0,252	0,246	-0,031	-0,027	2,439	14,815	
2	9	2	0,343	0,344	-0,077	-0,076	0,291	1,316	
4	9	3	1,750	1,719	-0,780	-0,764	1,803	2,094	
5	9	3	-1,735	-1,719	0,963	0,955	0,931	0,838	
7	9	2	-0,355	-0,344	0,272	0,267	3,198	1,873	
8	9	3	-0,247	-0,246	0,218	0,218	0,407	0,000	

Πίνακας Β.4β								Ποσοστιαίες διαφορές	
α	β	n*	K	K ₁	L	L ₁		100· K-K ₁ /K ₁	100· L-L ₁ /L ₁
2	3	3	-0,126	-0,143	0,086	0,096	11,888	10,417	
1	4	3	0,236	0,255	-0,059	-0,064	7,451	7,813	
3	4	4	-0,107	-0,109	0,078	0,082	1,835	4,878	
1	5	3	0,174	0,191	-0,034	-0,038	8,901	10,526	
3	5	3	-0,182	-0,191	0,108	0,115	4,712	6,087	
1	6	3	0,156	0,164	-0,027	-0,027	4,878	0,000	
5	6	3	-0,083	-0,088	0,068	0,073	5,682	6,849	
1	7	2	0,145	0,149	-0,023	-0,021	2,685	9,524	
2	7	2	0,299	0,334	-0,084	-0,096	10,479	12,500	
3	7	3	-1,275	-1,337	0,545	0,573	4,637	4,887	
4	7	2	-0,223	-0,223	0,125	0,127	0,000	1,575	
5	7	3	-0,117	-0,122	0,082	0,087	4,098	5,747	
6	7	2	-0,077	-0,084	0,066	0,072	8,333	8,333	

Πίνακας Β.4 : Οι τιμές των συντελεστών διεύθυνσης K, K₁ και των σταθερών όρων L, L₁ των ευθειών της μορφής (B.3.3.5), μερικές εκ των οποίων εμφανίζονται στο σχήμα B.24. Οι ευθείες αυτές προσεγγίζουν τα σημεία του σχήματος B.24 που αντιστοιχούν σε ακολουθίες συντονισμών της μορφής $\frac{m}{n}$, $\frac{m+\alpha}{n+\beta}$, $\frac{m+2\alpha}{n+2\beta}$, ..., με πρώτο όρο $\frac{m}{n}$ τους συντονισμούς $\frac{1}{2}$ (Πίνακας α) και $\frac{2}{3}$ (Πίνακας β). Οι σταθερές α και β παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές ώστε οι παρονομαστές των συντονισμών των παραπάνω ακολουθιών να είναι μικρότεροι ή ίσοι του 20 ($n \leq 20$). Το πλήθος των συντονισμών σε κάθε ακολουθία είναι n*. Στις δύο τελευταίες στήλες σημειώνονται οι ποσοστιαίες διαφορές $100 \cdot |(K - K_1)| / K_1$ και $100 \cdot |(L - L_1)| / L_1$.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι στο επίπεδο x₁x₂ εμφανίζονται οι ζώνες των συντονισμών $\frac{m}{n}$, η τάξη (δηλαδή η τιμή του παρονομαστή n) των οποίων δεν υπερβαίνει κάποιο ανώτατο όριο. Αυτό γίνεται κατανοητό αν σκεφτεί κανείς ότι το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$ είναι άπειρο, οπότε το άθροισμα του εύρους όλων των συντονισμών θα ήταν άπειρο, ενώ από την άλλη μεριά το συνολικό διαθέσιμο διάστημα στον άξονα x₂ είναι πεπερασμένο και ίσο με 2π. Εξετάζοντας λοιπόν με προσοχή τις προβολές των σημείων των τετραδιάστατων τροχιών στο επίπεδο x₁x₂ βρήκαμε εμπειρικά ότι η μέγιστη τάξη ενός συντονισμού, η ζώνη του οποίου είναι επαρκώς σχηματισμένη, είναι :

$$n_{0, \text{emp}} \approx 75 \quad (\text{B.3.3.10}).$$

Συγκεκριμένα μπορέσαμε να διακρίνουμε τη ζώνη του συντονισμού $\frac{7}{75}$.

Θεωρώντας τώρα ότι η ζώνη στην οποία εμφανίζονται οι καμπύλες κάποιου συντονισμού $\frac{m}{n}$ δεν έχει καμία περιοχή επικάλυψης με τις ζώνες άλλων συντονισμών, μπορούμε να βρούμε τη μέγιστη τάξη n' των συντονισμών που χρειάζονται για να γεμίσει το επίπεδο x₁x₂. Αφού το εύρος στον άξονα x₂ της ζώνης του συντονισμού $\frac{m}{n}$ δίνεται από τη σχέση (B.3.3.2) :

$$W = A \frac{1}{n^B}$$

και το συνολικό διάστημα του άξονα x_2 είναι 2π , η μέγιστη δυνατή τάξη θα δίνεται από τη σχέση :

$$\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n A \frac{1}{n^B} \cong 2\pi \quad (\text{B.3.3.11}),$$

όπου α_n το πλήθος των συντονισμών με παρονομαστή n . Στον εκθέτη Β της παραπάνω σχέσης μπορούμε να δώσουμε δύο τιμές : α) την πραγματική τιμή $B=1,049$ που βρήκαμε από την αριθμητική μελέτη των δεδομένων μας και β) την τιμή $B=1$, αφού θεωρούμε ότι πρακτικά το εύρος είναι αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n . Βάζοντας αυτές τις δύο τιμές στη σχέση (B.3.3.11) έχουμε :

$$n'_{0, B=1} \approx 54 \quad (\text{B.3.3.12})$$

και

$$n'_{0, B=1,049} \approx 63 \quad (\text{B.3.3.13}).$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της μέγιστης τάξης n' βρίσκεται πλησιέστερα στην εμπειρική τιμή $n_{0, \text{emp}} \approx 75$ για $B=1,049$. Αυτό συμβαίνει γιατί θέτοντας $B=1$ αντί για $B=1,049$ υπερεκτιμούμε μέσω της σχέσης (B.3.3.2) το εύρος των συντονισμών με αποτέλεσμα να χρειάζονται λιγότεροι συντονισμοί για να "γεμίσει" το επίπεδο $x_1 x_2$. Αυτή η διαφοροποίηση φαίνεται καθαρά στο παρακάτω παράδειγμα. Βρίσκοντας το συνολικό εύρος των συντονισμών με παρονομαστή 2, χρησιμοποιώντας $B=1,049$ ή $B=1$ δεν έχουμε πρακτικά διαφορετικά αποτελέσματα, γιατί έχουμε μόνο ένα τέτοιο συντονισμό. Έτσι έχουμε :

$$\alpha_n \cdot \frac{1}{n} = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{και} \quad \alpha_n \cdot \frac{1}{n^B} = 1 \cdot \frac{1}{2^{1,049}} = 0,483$$

Όταν όμως το πλήθος α_n των συντονισμών αυξηθεί, οι διαφορές των δύο αποτελεσμάτων γίνονται αρκετά σημαντικές. Για παράδειγμα, το πλήθος των συντονισμών με παρονομαστή 59 είναι 58, οπότε σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε :

$$\alpha_n \cdot \frac{1}{n} = 58 \cdot \frac{1}{59} = 0,983 \quad \text{και} \quad \alpha_n \cdot \frac{1}{n^B} = 58 \cdot \frac{1}{59^{1,049}} = 0,805$$

Παρά το γεγονός ότι τα αποτελέσματα (B.3.3.12) και (B.3.3.13) είναι προσεγγιστικά, διαφέρουν αρκετά από την εμπειρική τιμή της μέγιστης τάξης $n_{0, \text{emp}} \approx 75$. Κυρίως η εκτίμηση που παίρνουμε για $B=1$ ($n'_{0, B=1} \approx 54$) είναι αρκετά μακριά από την τιμή 75 με αποτέλεσμα να αμφισβητείται η εικασία ότι το εύρος της ζώνης του συντονισμού $\frac{\pi}{n}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n , για όλους τους συντονισμούς.

Η απάντηση σ' αυτό το πρόβλημα είναι ότι η υπόθεση της μη επικάλυψης των ζωνών των διαφόρων συντονισμών είναι λανθασμένη. Πράγματι κοιτώντας πιο προσεκτικά

τις προβολές των σημείων της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$, σε διάφορες περιοχές του επιπέδου x_1x_2 υπό κατάλληλη μεγέθυνση, βλέπουμε ότι δεν εμφανίζονται οι ζώνες κάποιων συντονισμών, γιατί σ' εκείνη την περιοχή υπάρχει κάποιος συντονισμός μικρότερης τάξης, το εύρος του οποίου είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να επικαλύπτει την περιοχή εμφάνισης του αρχικού συντονισμού. Για παράδειγμα οι συντονισμοί ..., $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{98}$, ..., $\frac{1}{66}$ δεν εμφανίζονται γιατί βρίσκονται μέσα στη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{1}$. Επίσης οι συντονισμοί $\frac{10}{91}$, $\frac{11}{100}$, $\frac{11}{98}$, $\frac{10}{89}$ επικαλύπτονται πλήρως από τη ζώνη του συντονισμού $\frac{1}{9}$. Φυσικά το φαινόμενο της πλήρους επικάλυψης συμβαίνει και για πολλούς άλλους συντονισμούς. Πέρα όμως από αυτό μπορούμε να έχουμε μερική μόνο επικάλυψη των διαφόρων συντονισμών, έτσι ώστε τα όρια του ενός να βρίσκονται μέσα στη ζώνη εμφάνισης του άλλου. Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι δύσκολο να προσδιοριστούν τα σαφή όρια της ζώνης κάθε συντονισμού. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι επικάλυψη παρατηρούμε ανάμεσα στους συντονισμούς $\frac{7}{62}$ και $\frac{6}{53}$, όπως επίσης και ανάμεσα στους $\frac{1}{3}$ και $\frac{23}{70}$.

Επομένως είναι δυνατό στο επίπεδο x_1x_2 να έχουμε την εμφάνιση συντονισμών μεγαλύτερης τάξης σε σχέση με τα όρια που βρήκαμε θεωρώντας αδύνατη την επικάλυψη (Σχέσεις B.3.3.12 και 13). Γνωρίζουμε ότι ο συντονισμός $\frac{m}{n}$ εμφανίζεται στην περιοχή $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ και το εύρος της ζώνης εμφάνισης του δίνεται από τη σχέση (B.3.3.2). Επομένως η ζώνη εμφάνισης του συντονισμού $\frac{m}{n}$ είναι το διάστημα :

$$x_2 \in \left[-2\pi \frac{m}{n} - \frac{W}{2}, -2\pi \frac{m}{n} + \frac{W}{2} \right] \pmod{2\pi} \quad (\text{B.3.3.14}).$$

Για να βρούμε λοιπόν μέχρι και ποιας τάξης συντονισμούς χρειαζόμαστε για να καλύψουμε πλήρως το διάστημα $x_2 \in [-\pi, \pi]$, θεωρούμε ένα πυκνό πλέγμα ισαπεχόντων σημείων το οποίο καλύπτει όλον τον άξονα x_2 και βρίσκουμε το μέγιστο δυνατό παρονομαστή που χρειαζόμαστε ώστε όλα τα σημεία του πλέγματος να βρίσκονται τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής (B.3.3.14). Συγκεκριμένα θεωρούμε ένα πλέγμα 6.283 σημείων και ένα πλέγμα 62.831 σημείων στον άξονα x_2 , τα οποία ισαπέχουν μεταξύ τους και καλύπτουν το διάστημα $x_2 \in [-\pi, \pi]$. Η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων είναι 10^{-3} και 10^{-4} αντίστοιχα. Για κάθε περίπτωση θεωρούμε ότι ο εκθέτης B στη σχέση (B.3.3.2) είναι $B=1,049$ ή $B=1$. Με αυτή τη διαδικασία έχουμε για τη μέγιστη τάξη των συντονισμών που υπάρχουν στο επίπεδο x_1x_2 :

$$n_{0, B=1} \approx 65 \quad \text{και} \quad n_{0, B=1,049} \approx 77 \quad (\text{B.3.3.15}),$$

για το πλέγμα των 6.283 σημείων, και

$$n_{0, B=1} \approx 65 \quad \text{και} \quad n_{0, B=1,049} \approx 78 \quad (\text{B.3.3.16}),$$

για το πλέγμα των 62.831 σημείων.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στα αποτελέσματα (B.3.3.15) και (B.3.3.16), επομένως η χρησιμοποίηση ενός ακόμα πιο πυκνού πλέγματος δεν θα άλλαξε ουσιαστικά τα αποτελέσματα. Αρα τα αποτελέσματα που παίρνουμε χρησιμοποιώντας το πλέγμα των 6.283 σημείων είναι αρκετά ακριβή.

Μια έμμεση απόδειξη ότι οι επικαλύψεις συντονισμών όντως συμβαίνουν, αποτελεί το γεγονός ότι τα αποτελέσματα που πήραμε με βάση αυτή τη θεώρηση (Σχέση B.3.15) προσεγγίζουν καλύτερα το εμπειρικό αποτέλεσμα (Σχέση B.3.10), σε σχέση με τις τιμές που πήραμε όταν δεν θεωρούσαμε επιτρεπτή την επικάλυψη συντονισμών (Σχέσεις B.3.12 και 13). Η τιμή της μέγιστης τάξης που πήραμε χρησιμοποιώντας την πραγματική τιμή του εκθέτη B ($n_{0, B=1,049} \approx 77$), πρακτικά ταυτίζεται με την εμπειρική τιμή ($n_{0, emp} \approx 75$). Επίσης θα μπορούσαμε με κάποια ανοχή να αποδεχτούμε και το αποτέλεσμα που είχαμε για $B=1$. Επομένως η υπόθεση, ότι το εύρος της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ είναι σχεδόν αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n , ισχύει ικανοποιητικά για όλους τους συντονισμούς που εμφανίζονται στο επίπεδο $x_1 x_2$ αν και το εξαγάγαμε χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα για τους συντονισμούς με $n \leq 20$.

Παρότι η μέχρι τώρα μελέτη έγινε για τις προβολές στο επίπεδο $x_1 x_2$ των σημείων της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, οι δομές που δημιουργούνται σ' αυτό το επίπεδο (Σχήμα B.5), καθώς και η εμπειρική σχέση (B.3.3.2) για το εύρος των ζωνών συντονισμού, παραμένουν ίδιες για όλες τις τροχιές με αρχικές συνθήκες στο επίπεδο $x_1 x_2$ έξω από την κεντρική νησίδα του σχήματος B.4 και οπουδήποτε στο επίπεδο $x_3 x_4$.

Η παράμετρος μ της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) είναι πολύ σημαντική γιατί καθώς η τιμή της αυξάνει, η τετραδιάστατη απεικόνιση απομακρύνεται από την οριακή κατάσταση, κατά την οποία αποτελείται από δύο διδιάστατες απεικονίσεις. Το βασικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι αν και μέχρι ποια τιμή της παραμέτρου μ ισχύει η δομή στο επίπεδο $x_1 x_2$ που έχουμε ήδη περιγράψει, καθώς και ο εμπειρικός νόμος (B.3.3.2) για το εύρος των συντονισμών.

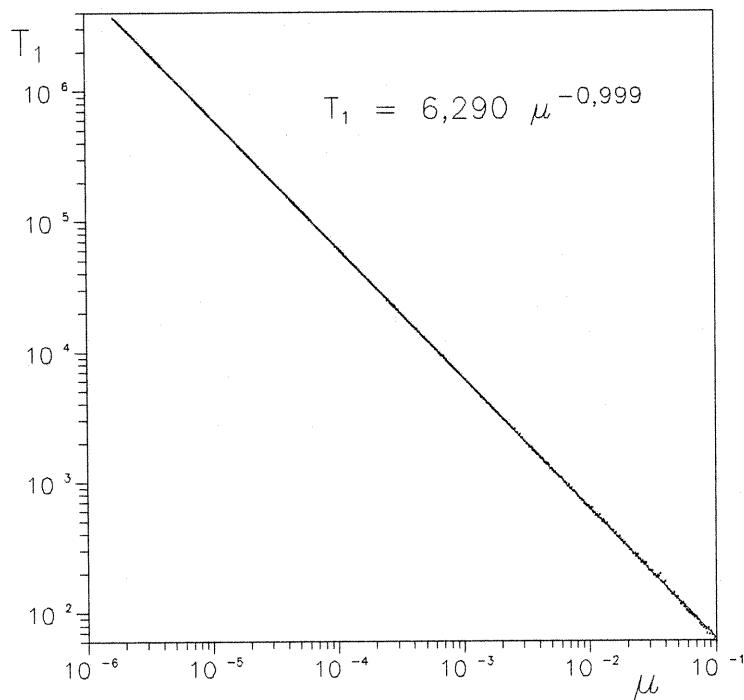
Στο σχήμα B.25 βλέπουμε πως μεταβάλλεται το πλήθος των επαναλήψεων T_1 της απεικόνισης (B.1.1) που χρειάζονται ώστε η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ να επιστρέψει στην περιοχή $x_2 \approx 0$, ως συνάρτηση της παραμέτρου μ. Σημειώνουμε ότι οι τιμές των άλλων παραμέτρων της τετραδιάστατης απεικόνισης είναι $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$. Βλέπουμε ότι το πλήθος των επαναλήψεων T_1 μειώνεται με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου μ. Έτσι ενώ για $\mu=10^{-5}$ έχουμε $T_1 \approx 6 \cdot 10^5$, για $\mu=10^{-1}$ έχουμε $T_1 \approx 10$. Η καμπύλη που προσεγγίζει καλύτερα τα σημεία του σχήματος B.25 δίνεται από τη σχέση :

$$T_1 = 6,290 \cdot \mu^{-0.999} \quad (\text{B.3.3.17}).$$

Άρα το πλήθος των επαναλήψεων T_1 εξαρτάται σχεδόν αντιστρόφως ανάλογα από την παράμετρο σύζευξης μ. Επομένως όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου σύζευξης, τόσο λιγότερες επαναλήψεις χρειάζεται η τροχιά για να επιστρέψει στην περιοχή $x_2 \approx 0$, άρα λιγότερα σημεία χρειάζονται για να καλυφθεί το επίπεδο $x_1 x_2$, εκτός της κεντρικής νησίδας ευστάθειας. Έτσι σχηματίζονται στο επίπεδο $x_1 x_2$ συντονισμοί όλο και χαμηλότερης τάξης, αφού πρώτον οι συντονισμοί μεγάλης τάξης χρειάζονται πολλά σημεία για να σχηματιστούν και δεύτερον το εύρος κάθε συντονισμού αυξάνει με την αύξηση της παραμέτρου μ, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για $\mu=5 \times 10^{-5}$, $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$ η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ δημιουργεί στο επίπεδο προβολής $x_1 x_2$ παρόμοιους σχηματισμούς με αυτούς που φαίνονται στο σχήμα B.5, οπότε, οι δομές που περιγράφονται στην παράγραφο B.3.1 συνεχίζουν να υπάρχουν. Έτσι η ζώνη του συντονισμού $\frac{m}{n}$ εμφανίζεται πάλι όταν

$x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ αλλά το εύρος της είναι μεγαλύτερο απ' ότι για $\mu=10^{-5}$. Επιπροσθέτως η τροχιά χρειάζεται περίπου 126.000 επαναλήψεις για να επιστρέψει στην περιοχή $x_2 \approx 0$ αντί των περίπου 625.000 επαναλήψεων που χρειαζόταν για $\mu=10^{-5}$. Επομένως στο επίπεδο $x_1 x_2$ εμφανίζονται ζώνες συντονισμών μέχρι μια μέγιστη τάξη η οποία είναι μικρότερη της αντίστοιχης τάξης για $\mu=10^{-5}$.



Σχήμα B.25 : Το πλήθος των επαναλήψεων T_1 της απεικόνισης (B.1.1) που χρειάζονται ώστε η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ να επιστρέψει στην περιοχή $x_2 \approx 0$, ως συνάρτηση της παραμέτρου σύζευξης μ . Η καμπύλη που προσεγγίζει καλύτερα τα αριθμητικά δεδομένα είναι η $T_1=6,290 \cdot \mu^{-0,999}$. Οι τιμές των άλλων παραμέτρων παραμένουν $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$.

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ($\mu=10^{-5}$), μετράμε εμπειρικά το εύρος W στον άξονα x_2 των ζωνών των συντονισμών $\frac{m}{n}$ με $2 \leq n \leq 15$. Η συμπεριφορά αυτών των τιμών είναι η ίδια με αυτή της προηγούμενης περίπτωσης, δηλαδή το εύρος ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ είναι πρακτικά ανεξάρτητο του αριθμητή m . Παρατηρούμε επίσης ότι το εύρος της ζώνης κάθε συντονισμού αυξάνει με την αύξηση της παραμέτρου μ . Το εύρος W της ζώνης του συντονισμού $\frac{m}{n}$ συναρτήσει του παρονομαστή n , προσεγγίζεται πάλι ικανοποιητικά από μια σχέση της μορφής (B.3.3.2) ($W=A \cdot n^{-B}$) όπου :

$$A = 0,311, \quad B = 1,073 \quad (\text{B.3.3.18}),$$

όπως φαίνεται στο σχήμα B.26a. Σημειώνουμε ότι έχουμε πάλι $B \approx 1$, αλλά η τιμή της σταθεράς A αυξήθηκε σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση (Σχέση B.3.3.3).

Παίρνοντας υπ' όψη μας, όπως και προηγουμένως, τη δυνατότητα επικάλυψης των ζωνών διαφόρων συντονισμών βρίσκουμε το μέγιστο παρονομαστή n_0 μέχρι τον οποίο

εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 όλοι οι συντονισμοί καλύπτοντας πλήρως το διάστημα $x_2 \in [-\pi, \pi]$. Έχουμε λοιπόν :

$$n_{0, B=1} \approx 40 \text{ και } n_{0, B=1,073} \approx 49 \quad (\text{B.3.3.19}).$$

Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό της μέγιστης τάξης n_0 των σχηματιζόμενων συντονισμών χρησιμοποιήσαμε ένα πλέγμα 6.283 σημείων στον άξονα x_2 , όπου η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων ήταν 10^{-3} . Από την άλλη μεριά εξετάζοντας προσεκτικά τις προβολές των σημείων της τετραδιάστατης απεικόνισης στο επίπεδο x_1x_2 , βρήκαμε εμπειρικά ότι η μέγιστη τάξη των εμφανιζόμενων συντονισμών είναι :

$$n_{0, \text{emp}} \approx 46 \quad (\text{B.3.3.20}).$$

Επομένως η τιμή της μέγιστης τάξης n_0 για $B=1,073$ βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με το εμπειρικό αποτέλεσμα. Επίσης μπορούμε να δεχτούμε με κάποια ανοχή ως ικανοποιητικό και το αποτέλεσμα για $B=1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την προσέγγιση ότι το εύρος της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ εξαρτάται σχεδόν αντιστρόφως ανάλογα από τον παρονομαστή του n ($B=1$), αποδεκτή, αφού περιγράφει αρκετά καλά τα χαρακτηριστικά της τροχιάς στο επίπεδο x_1x_2 .

Για $\mu=10^{-3}$, $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$ η δομή στο επίπεδο x_1x_2 , παραμένει η ίδια. Η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ χρειάζεται τώρα μόνο 6.300 επαναλήψεις για να επιστρέψει στην περιοχή $x_2 \approx 0$, επομένως στο επίπεδο x_1x_2 σχηματίζονται οι ζώνες λιγότερων συντονισμών από προηγουμένως. Μετράμε εμπειρικά το εύρος των ζωνών των συντονισμών $\frac{m}{n}$ με $2 \leq n \leq 13$ και βρίσκουμε ότι αυτά τα δεδομένα προσεγγίζονται και πάλι ικανοποιητικά από μια σχέση της μορφής (B.3.3.2) με :

$$A = 0,679, \quad B = 0,980 \quad (\text{B.3.3.21}),$$

όπως φαίνεται στο σχήμα B.26β. Έτσι έχουμε ξανά $B \approx 1$ ενώ η τιμή του A αυξήθηκε σε σχέση με τις τιμές για $\mu=10^{-5}$ ($A=0,191$) και $\mu=5 \times 10^{-5}$ ($A=0,311$). Εργαζόμενοι όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις βρίσκουμε :

$$n_{0, \text{emp}} \approx 18 \quad (\text{B.3.3.22})$$

και

$$n_{0, B=1} \approx 18 \text{ και } n_{0, B=0,980} \approx 18 \quad (\text{B.3.3.23}).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι το εύρος της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ είναι σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάσαμε, σχεδόν αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n και αυξάνει καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου σύζευξης μ . Στο σχήμα B.27 σχεδιάζουμε σε λογαριθμική κλίμακα τις τιμές της ποσότητας A (Σχέση B.3.3.2) συναρτήσει της παραμέτρου μ . Βλέπουμε ότι η αύξηση της τιμής του A προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη σχέση :

$$A = 4,5379 \cdot \mu^{0,2735} \quad (\text{B.3.3.24})$$

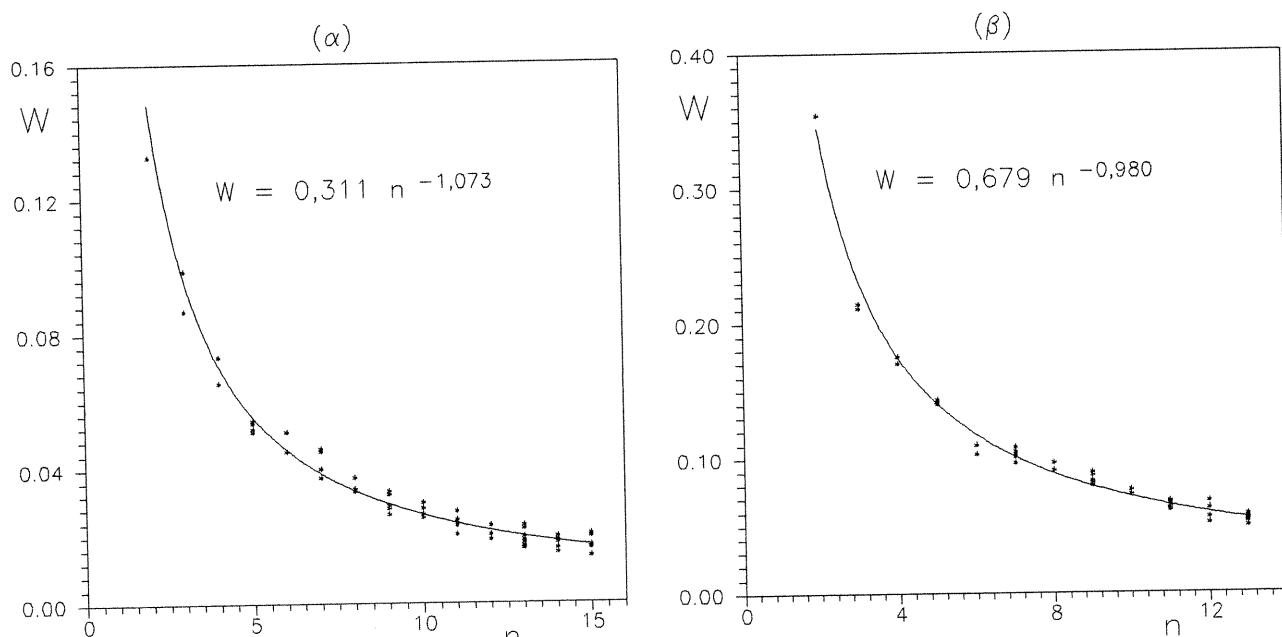
αν και έχουμε στη διάθεσή μας μόνο 3 σημεία. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (B.3.3.2) και (B.3.3.24) έχουμε τη γενική μορφή :

$$W\left(\mu, \frac{m}{n}\right) \approx a \cdot \frac{\mu^b}{n} \quad (\text{B.3.3.25}),$$

όπου

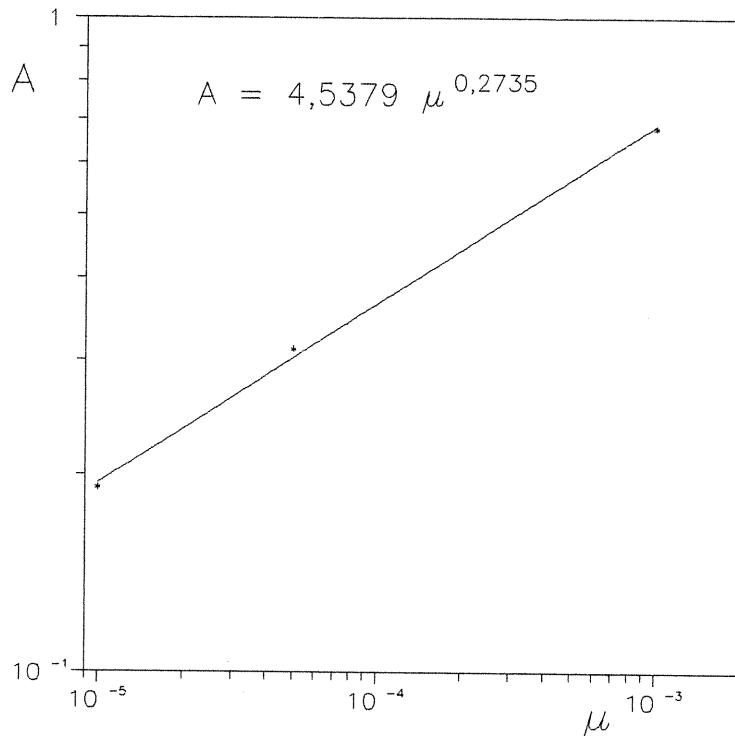
$$a \approx 4,54, \quad b \approx 0,27 \quad (\text{B.3.3.26}),$$

η οποία μας δίνει το εύρος στον άξονα x_2 , του συντονισμού $\frac{m}{n}$ συναρτήσει της παραμέτρου σύζευξης μόταν $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$.



Σχήμα B.26 : Το εύρος W των ζωνών των διαφόρων συντονισμών $\frac{m}{n}$, συναρτήσει του παρονομαστή n για α) $\mu=5 \times 10^{-5}$ και β) $\mu=10^{-3}$. Οι τιμές των άλλων παραμέτρων είναι $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$. Η καμπύλη που προσεγγίζει καλύτερα τα αριθμητικά δεδομένα είναι της μορφής $W=A \cdot n^{-B}$ και σχεδιάζεται και στα δύο σχήματα.

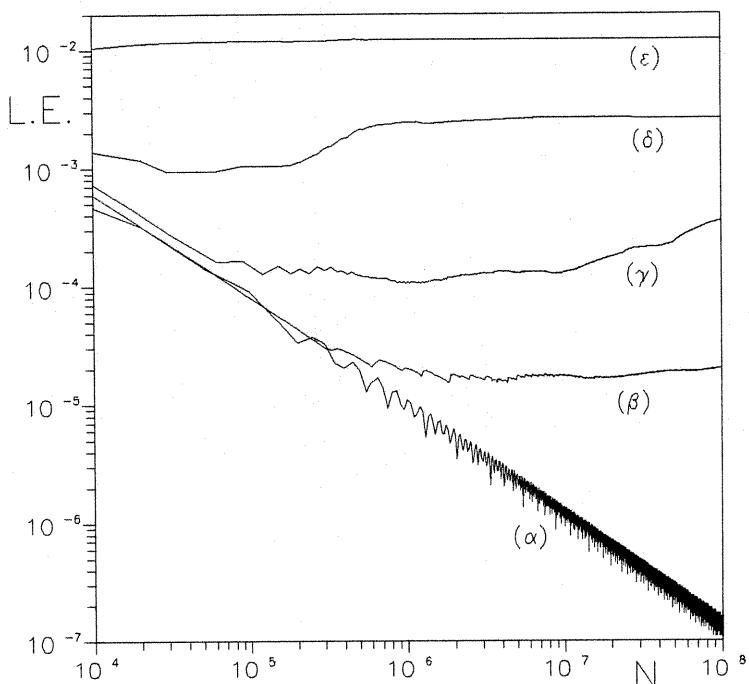
Η μορφολογία που μελετήσαμε στο επίπεδο προβολής $x_1 x_2$, καθώς και ο εμπειρικός νόμος (B.3.3.25) ισχύουν για $\mu \leq 10^{-1}$, γιατί για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου σύζευξης τα σημεία που διαγράφει η τροχιά στο επίπεδο $x_1 x_2$, μέχρι να ξαναπεράσει από την περιοχή $x_2 \approx 0$, είναι πολύ λίγα όπως φαίνεται από τη σχέση (B.3.3.17), οπότε δεν μπορούν να σχηματιστούν οι ζώνες των διαφόρων συντονισμών. Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου σύζευξης μη η επίδραση των χαρακτηριστικών της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) στη μορφολογία του τετραδιάστατου χώρου φάσεων μειώνεται.



Σχήμα B.27 : Η τιμή της ποσότητας A της σχέσης (B.3.3.2) $W=A\cdot n^{-B}$, ως συνάρτηση της παραμέτρου σύζευξης μ . Και στους δύο άξονες έχουμε λογαριθμική κλίμακα. Σχεδιάζουμε επίσης την καμπύλη $A=4,5379 \cdot \mu^{0,2735}$ που προσεγγίζει τα αριθμητικά δεδομένα.

Η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$, την οποία εξετάσαμε για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ δεν είναι ποτέ περιοδική (όπως είδαμε για παράδειγμα για $\mu=10^{-5}$). Για να προσδιορίσουμε αν η τροχιά αυτή είναι χαοτική ή οργανωμένη υπολογίσαμε για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ , το χαρακτηριστικό αριθμό Liapunov (L.C.N.), στον οποίο έχουμε αναφερθεί στην παράγραφο A.2. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα B.28, όπου βλέπουμε την εξέλιξη του χαρακτηριστικού εκθέτη Liapunov (L.E.) ως συνάρτηση του πλήθους N των επαναλήψεων της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) για διάφορες τιμές της παραμέτρου σύζευξης μ . Έτσι για $\mu=0$ παρατηρούμε μια εκθετική μείωση του χαρακτηριστικού εκθέτη Liapunov (καμπύλη (a) στο σχήμα B.28), ο οποίος τείνει προς την τιμή 0, οπότε συμπεραίνουμε ότι πρακτικά L.C.N.=0 (συγκεκριμένα έχουμε $L.C.N.\approx 10^{-7}$ για 10^8 επαναλήψεις). Πράγματι η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$ είναι οργανωμένη όταν $\mu=0$ (οπότε η τετραδιάστατη απεικόνιση (B.1.1) αναλύεται σε δύο ανεξάρτητες διδιάστατες απεικονίσεις) αφού στο επίπεδο x_3x_4 παραμένει συνεχώς στο ευσταθές σημείο $x_3=x_4=0$, ενώ στο x_1x_2 βρίσκεται πάνω σε μια αμετάβλητη καμπύλη γύρω από το σημείο $x_1=x_2=0$ (Σχήμα B.1). Αντιθέτως όταν $\mu\neq0$ οι χαρακτηριστικοί εκθέτες Liapunov δεν έχουν την τάση να πλησιάσουν την τιμή 0, αλλά φαίνεται ότι τείνουν σε θετικές τιμές διάφορες του μηδενός, αν και πολύ κοντά σ' αυτό. Παρατηρούμε επίσης ότι όσο αυξάνει η τιμή της παραμέτρου μ αυξάνει και αυτό το όριο, δηλαδή η τιμή του χαρακτηριστικού αριθμού Liapunov. Συγκεκριμένα μετά από 10^8 επαναλήψεις της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) έχουμε για $\mu=10^{-5}$ $L.C.N.\approx 2\times 10^{-5}$, για $\mu=10^{-4}$ $L.C.N.\approx 3,5\times 10^{-4}$, για $\mu=10^{-3}$ $L.C.N.\approx 2,6\times 10^{-3}$ και για $\mu=10^{-2}$ $L.C.N.\approx 1,2\times 10^{-2}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ενώ για $\mu=0$ η τροχιά με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$

είναι μάλλον οργανωμένη, για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης μ παρουσιάζει ασθενή χαοτική συμπεριφορά. Σημειώνουμε ότι για να προσδιορίσουμε τον πραγματικό χαρακτηριστικό αριθμό Liapunov θα έπρεπε να βρούμε το όριο στο οποίο τείνουν οι χαρακτηριστικοί εκθέτες μετά από άπειρες επαναλήψεις της απεικόνισης (B.1.1). Κάτι τέτοιο είναι πρακτικά αδύνατο, αλλά μπορούμε να πούμε με σχετική σιγουριά, ότι για $\mu \neq 0$ L.C.N.>0, αφού οι καμπύλες (β) , (γ) , (δ) και (ε) του σχήματος B.28 δεν τείνουν προς την τιμή 0 όπως συμβαίνει με την καμπύλη (α) .



Σχήμα B.28 : Ο χαρακτηριστικός εκθέτης Liapunov (L.E.) της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$, συναρτήσει του πλήθους N των επαναλήψεων της απεικόνισης (B.1.1) για $\alpha) \mu=0$ $\beta) \mu=10^{-5}$ $\gamma) \mu=10^{-4}$ $\delta) \mu=10^{-3}$ και $\varepsilon) \mu=10^{-2}$. Και στους δύο άξονες έχουμε λογαριθμική κλίμακα.

Μελετώντας λοιπόν το εύρος W των ζωνών διαφόρων συντονισμάν $\frac{m}{n}$ στο επίπεδο x_1x_2 καταλήξαμε σε έναν εμπειρικό νόμο (Σχέσεις B.3.3.25 και 26), ο οποίος μας δίνει την εξάρτηση του W από τον παρονομαστή n και την παράμετρο σύζευξης μ . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι γενικά το εύρος W είναι αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n , αφού με αυτήν την υπόθεση περιγράφουμε ικανοποιητικά τα διάφορα χαρακτηριστικά των δομών που σχηματίζονται στο επίπεδο x_1x_2 (για παράδειγμα υπολογίζουμε προσεγγιστικά τη μέγιστη τάξη των εμφανιζόμενων συντονισμάν). Είδαμε επίσης ότι αυτή η δομή υπάρχει για μικρές σχετικά τιμές της παραμέτρου σύζευξης, $\mu \leq 10^{-1}$. Η τιμή αυτή αποτελεί ένα προσεγγιστικό όριο της εμβέλειας της επίδρασης της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) στη μορφολογία των τροχιών της τετραδιάστατης απεικόνισης.

B.4. Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.

Ασχοληθήκαμε με την αριθμητική μελέτη μη περιοδικών τροχιών μιας τετραδιάστατης συμπλεκτικής απεικόνισης, οι οποίες παρουσιάζουν μια ασθενή χαοτική συμπεριφορά. Ο βασικός μας στόχος ήταν η καταγραφή των δομών που δημιουργούνται στον τετραδιάστατο χώρο φάσεων, η κατανόηση του τρόπου δημιουργίας τους καθώς και η εύρεση οποιονδήποτε ομοιοτήτων ή σχέσεων αυτών, με ήδη γνωστές δομές που παρατηρούνται σε απεικονίσεις δύο διαστάσεων. Για να μεταπηδήσουμε ομαλά, και κατά ένα συνεχή τρόπο, από συστήματα με διδιάστατο χώρο φάσεων, η συμπεριφορά των οποίων είναι σε πολύ μεγάλο βαθμό γνωστή, σε ένα σύστημα με τετραδιάστατο χώρο φάσεων, στον οποίο υπάρχουν περισσότερα ανοιχτά προβλήματα, επιλέξαμε την τετραδιάστατη απεικόνιση (B.1.1), η οποία αποτελείται από δύο συζευγμένες διδιάστατες απεικονίσεις της μορφής (B.2.1). Έτσι καθώς η τιμή της παραμέτρου σύζευξης μ ($\mu > 0$) αυξάνει, η τετραδιάστατη απεικόνιση (B.1.1) απομακρύνεται από την οριακή κατάσταση $\mu=0$ στην οποία το σύστημα μας αποτελείται από δύο ασύζευκτες διδιάστατες απεικονίσεις. Η μελέτη μας περιορίζεται σε μικρές τιμές της παραμέτρου μ ώστε να εξετάσουμε λεπτομερώς τη μετάβαση από μια απεικόνιση δύο διαστάσεων σε μια απεικόνιση τεσσάρων διαστάσεων.

Για τη μελέτη της επίδρασης των χαρακτηριστικών των δομών που εμφανίζονται σε διδιάστατους χώρους φάσεων πάνω στις δομές τετραδιάστατων χώρων φάσεων, προτιμήσαμε να μελετήσουμε μια τετραδιάστατη απεικόνιση, παρά ένα Χαμιλτονιανό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας, το οποίο θα επηρεαζόταν από ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας. Αυτή η επιλογή έγινε γιατί παρά το γεγονός ότι δεν υπάρχει άμεση αντιστοιχία της απεικόνισης με κάποιο φυσικό σύστημα οι υπολογισμοί μας είναι χρονικά πολύ πιο σύντομοι. Άλλωστε γνωρίζουμε ότι οι απεικονίσεις και τα Χαμιλτονιανά συστήματα έχουν ποιοτικά ίδια συμπεριφορά.

Είδαμε πραγματικά ότι τα χαρακτηριστικά της διδιάστατης απεικόνισης επηρεάζουν τις τροχιές της τετραδιάστατης απεικόνισης δημιουργώντας κάποιες συγκεκριμένες δομές στα διάφορα επίπεδα προβολής για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης ($\mu \leq 10^{-1}$). Μελετήσαμε με μεγάλη λεπτομέρεια τον τρόπο δημιουργίας αυτών των δομών και την εξέλιξή τους, καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου μ , δίνοντας ταυτόχρονα κάποιους εμπειρικούς νόμους που περιγράφουν τη μεταβολή διαφόρων χαρακτηριστικών τους. Παρότι συνήθως εξετάζαμε τις δομές που δημιουργούσαν τα σημεία της τροχιάς με αρχικές συνθήκες $x_1=3$, $x_2=x_3=x_4=0$, η μελέτη μας περιγράφει τη συμπεριφορά ενός πλήθους μη περιοδικών τροχιών και είναι αρκετά γενική.

Τα συμπεράσματα της μελέτης μας θα μπορούσαν να συνοψιστούν στα ακόλουθα :

1. Τα χαρακτηριστικά της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) επηρεάζουν δραστικά τη μορφολογία των προβολών στο επίπεδο x_1x_2 , των τετραδιάστατων τροχιών. Έτσι γύρω από το σημείο $x_1=x_2=0$, το οποίο αντιστοιχεί στην ευσταθή περιοδική τροχιά 1a (Σχέση B.2.2) της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1), οι τροχιές βρίσκονται πάνω σε αμετάβλητες επιφάνειες, οι προβολές των οποίων στο επίπεδο x_1x_2 μοιάζουν με αμετάβλητες καμπύλες δημιουργώντας μια παρόμοια δομή με αυτή που παρατηρούμε στη διδιάστατη απεικόνιση (Σχήμα B.1). Τα σημεία των τετραδιάστατων τροχιών, με αρχικές συνθήκες στο επίπεδο x_1x_2 , έξω από τη νησίδα που σχηματίζεται γύρω από το σημείο $x_1=x_2=0$, διατάσσονται κατά έναν ορισμένο τρόπο δημιουργώντας ζώνες σχεδόν παράλληλες στον άξονα x_1 όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ με $m, n \in \mathbb{N}^*$ και $m \leq n$. Τα σημεία στο εσωτερικό αυτών των ζωνών δημιουργούν η καμπύλες με δύο οποιαδήποτε διαδοχικά σημεία να εμφανίζονται κάθε m καμπύλες, οπότε λέμε ότι

έχουμε ένα συντονισμό $\frac{m}{n}$. Έτσι δημιουργούνται οι ζώνες όλων των δυνατών συντονισμών $\frac{m}{n}$ με $0 < \frac{m}{n} \leq 1$, οι οποίες καλύπτουν πλήρως το επίπεδο x_1x_2 , έξω από την κεντρική νησίδα που εμφανίζεται γύρω από το σημείο $x_1 = x_2 = 0$ (Σχήμα B.4). Οι ζώνες συντονισμού οφείλονται στην ύπαρξη του συντονισμού $\frac{m}{n}$ στο επίπεδο x_1x_2 της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) για $x_2 = -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ και $v=0$, οπότε εμφανίζονται η οριζοντίως τοποθετημένα σημεία τα οποία διαγράφονται ανά m .

2. Επειδή οι ρητοί αριθμοί είναι άπειροι, ενώ το πλήθος των σημείων στο επίπεδο x_1x_2 πεπερασμένο, δεν είναι δυνατό να σχηματιστούν οι ζώνες όλων των συντονισμών. Άλλωστε για να γίνει ορατός ένας συντονισμός πρέπει να υπάρχουν αρκετά σημεία στην περιοχή εμφάνισής του, έτσι ώστε να σχηματιστούν οι καμπύλες του. Έτσι όταν αυξάνει η τάξη ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ (δηλαδή η τιμή του παρονομαστή n) αυξάνει το πλήθος των καμπυλών του, άρα χρειάζονται περισσότερα σημεία για να γίνουν αυτές ορατές. Επομένως στο επίπεδο x_1x_2 δε σχηματίζονται οι ζώνες των συντονισμών τάξης μεγαλύτερης από κάποιο όριο. Το όριο αυτό μειώνεται με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου σύζευξης μ , επειδή πρώτον μειώνεται το πλήθος των σημείων της απεικόνισης στο επίπεδο x_1x_2 σύμφωνα με τη σχέση (B.3.3.17) και δεύτερον αυξάνει το εύρος στον άξονα x_2 κάθε συντονισμού σύμφωνα με τη σχέση (B.3.3.25), οπότε το επίπεδο x_1x_2 καλύπτεται πλήρως από μικρότερο πλήθος συντονισμών.
3. Οι καμπύλες ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ είναι σχεδόν κάθετες στον άξονα x_1 όταν $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$, οπότε και ο συντονισμός είναι ορατός. Πριν από την εμφάνιση του συντονισμού, δηλαδή όταν η τροχιά βρίσκεται σε περιοχές με $x_2 > -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ οι καμπύλες του συντονισμού έχουν αρνητική κλίση στο επίπεδο x_1x_2 . Μετά την εμφάνιση του συντονισμού, δηλαδή όταν η τροχιά βρίσκεται σε περιοχές με $x_2 < -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ οι καμπύλες έχουν θετική κλίση. Γενικά τα σημεία στο επίπεδο x_1x_2 μπορεί να θεωρηθούν ότι βρίσκονται πάνω στις καμπύλες οποιουδήποτε συντονισμού $\frac{m}{n}$, όταν όμως βρίσκονται μακριά από την περιοχή $x_2 \approx -2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}$ αυτές οι καμπύλες είναι πολύ στρεβλωμένες και δυσδιάκριτες. Σημειώνουμε ότι όταν η απόσταση στον άξονα x_1 δύο σημείων που βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη ενός συντονισμού, αυξηθεί αρκετά με την εξέλιξη της τροχιάς, είναι δυνατό λόγω της 2π -περιοδικότητας της μεταβλητής x_1 , να αλλάξει η φορά διαγραφής της καμπύλης οπότε η κλίση της από θετική να γίνει αρνητική. Με αυτόν τον τρόπο για παράδειγμα, οι 19 καμπύλες του συντονισμού $\frac{1}{19}$ αλλάζουν τη φορά τους για να σχηματίσουν στη συνέχεια τη ζώνη του συντονισμού $\frac{2}{19}$ κ.ο.κ..
4. Η επίδραση της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) (θέτοντας x_3, x_4, v στη θέση των x_1, x_2, v) είναι πολύ ισχυρή και στο επίπεδο προβολής x_3x_4 . Έτσι όταν τα σημεία της τετραδιάστατης τροχιάς παραμένουν κοντά στην περιοχή $x_3 = x_4 = 0$ επηρεάζονται από τις περιοδικές τροχιές που διακλαδίζονται από την ευσταθή περιοδική τροχιά 1α ($x_3 = x_4 = 0$, σχέση B.2.2) της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1). Έτσι για παράδειγμα η τετραδιάστατη τροχιά επηρεάζεται για $\kappa = 10^{-1}$ κυρίως από την περιοδική τροχιά της διδιάστατης απεικόνισης με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{20}$, ενώ για $\kappa = 0,11$ κυρίως από την περιοδική τροχιά με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{19}$.
5. Οι προβολές των σημείων των τετραδιάστατων τροχιών στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 και x_2x_4 σχηματίζουν πολύπλοκες εικόνες, γιατί σε κάθε τέτοιο επίπεδο έχουμε μια

μεταβλητή από τη διδιάστατη απεικόνιση των x_1, x_2 και μια μεταβλητή από την απεικόνιση των x_3, x_4 . Μέσα σ' αυτήν την πολυπλοκότητα όμως υπάρχει μια δομή. Έτσι όταν η τετραδιάστατη τροχιά βρίσκεται στη ζώνη του συντονισμού $\frac{m}{n}$ στο επίπεδο x_1x_2 και κοντά στο σημείο $x_3=x_4=0$ στο επίπεδο x_3x_4 , σχηματίζονται ομαλές καμπύλες στα επίπεδα x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3 και x_2x_4 όταν σχεδιάζουμε 1 σημείο κάθε $j \in N^*$ επαναλήψεις της απεικόνισης όπου $j=E.K.P.(n,20)$ όταν $\kappa=10^{-1}$ και $j=E.K.P.(n,19)$ όταν $\kappa=0,11$. Γενικά η τιμή του j ισούται με το E.K.P. των παρονομαστών των συντονισμών που επηρεάζουν την τροχιά στα επίπεδα x_1x_2 και x_3x_4 .

6. Μετρήσαμε εμπειρικά το εύρος στον άξονα x_2 των ζωνών διαφόρων συντονισμών $\frac{m}{n}$ που εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 , για διάφορες μικρές σχετικά τιμές της παραμέτρου σύζευξης μ ($\mu \leq 10^{-1}$). Από την αριθμητική επεξεργασία των δεδομένων που προέκυψαν καταλήξαμε σ' έναν εμπειρικό νόμο, ο οποίος περιγράφει ικανοποιητικά τη μεταβολή του εύρους συναρτήσει της παραμέτρου σύζευξης.

Το εύρος W της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου μ εξαρτάται από την τιμή του παρονομαστή n και όχι από την τιμή του αριθμητή m . Δηλαδή οι ζώνες συντονισμών με τον ίδιο παρονομαστή αλλά διαφορετικό αριθμητή έχουν πρακτικά το ίδιο εύρος. Αυτό φαίνεται για παράδειγμα από το γεγονός, ότι οι κλίσεις a_1 των ευθειών $W = a_1(\frac{m}{n}) + a_2$ (Σχέση B.3.3.1) για όλες τις δυνατές τιμές του παρονομαστή n είναι πρακτικά μηδέν όπως φαίνεται από τα στοιχεία του πίνακα B.3.

Για κάθε συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου μ το εύρος W της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ είναι σχεδόν αντιστρόφως ανάλογο του παρονομαστή n γιατί τα αριθμητικά δεδομένα προσεγγίζονται πάντα από μια σχέση της μορφής $W=A \cdot n^{-B}$ (Σχέση B.3.3.2), όπου η τιμή του εκθέτη B είναι περίπου ίση με τη μονάδα (Σχέσεις B.3.3.3, 18 και 21). Επομένως συντονισμοί μεγάλης τάξης δημιουργούν ζώνες στο επίπεδο x_1x_2 πολύ μικρού εύρους. Θεωρώντας ότι $B=1$, περιγράφουμε με αρκετή ακρίβεια τη δομή που εμφανίζεται στο διάγραμμα $W = f(\frac{m}{n})$ (Σχήμα B.24) για $\mu=10^{-5}$, αλλά παρόμοια συμπεριφορά έχουμε και για άλλες τιμές της παραμέτρου μ . Επομένως η προσέγγιση $B=1$ είναι ικανοποιητική.

Τέλος το εύρος W της ζώνης ενός συγκεκριμένου συντονισμού $\frac{m}{n}$ αυξάνει με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου σύζευξης μ . Αυτό το γεγονός σε συνδυασμό με τη μείωση του πλήθους των σημείων στο επίπεδο x_1x_2 (Σχέση B.3.3.17) έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του πλήθους των συντονισμών που εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου μ . Η τιμή του εύρους W αυξάνει γενικά ως μια δύναμη της παραμέτρου μ .

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στην εμπειρική σχέση :

$$W\left(\mu, \frac{m}{n}\right) \approx 4,54 \cdot \frac{\mu^{0,27}}{n} \quad (\text{B.4.1}),$$

η οποία μας δίνει το εύρος W της ζώνης ενός συντονισμού $\frac{m}{n}$ ως συνάρτηση της παραμέτρου σύζευξης μ και του παρονομαστή n όταν οι άλλες δύο παράμετροι της απεικόνισης (B.1.1) παραμένουν σταθερές : $v=10^{-3}$ και $\kappa=10^{-1}$.

7. Στο επίπεδο x_1x_2 δεν εμφανίζονται οι ζώνες κάποιων συντονισμών γιατί επικαλύπτονται από τις ζώνες κάποιων άλλων συντονισμών μικρότερης τάξης (αλλά μεγαλύτερου εύρους) που υπάρχουν στην ίδια περιοχή. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις στις οποίες έχουμε μερική επικάλυψη των ζωνών διαφόρων συντονισμών έτσι ώστε τα όρια του ενός να βρίσκονται μέσα στη ζώνη εμφάνισης του άλλου. Δημιουργείται έτσι μια κοινή ζώνη στο επίπεδο x_1x_2 , όπου τα σημεία της τροχιάς επηρεάζονται από δύο διαφορετικούς συντονισμούς.

Ένα παρόμοιο φαινόμενο συμβαίνει και στο επίπεδο x_3x_4 όταν η τροχιά μένει κοντά στην περιοχή $x_3 = x_4 = 0$. Είναι δυνατό για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου κ η τροχιά να επηρεάζεται από διαφορετικές περιοδικές τροχιές της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1), οι οποίες έχουν παραπλήσιους αριθμούς περιστροφής. Για παράδειγμα από τη μελέτη των σχημάτων B.17 και B.18 είδαμε ότι η μορφολογία της τετραδιάστατης τροχιάς για $\kappa=0,11$ στο επίπεδο x_3x_4 επηρεάζεται κυρίως από την περιοδική τροχιά με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{19}$ αν και η επίδραση της τροχιάς με αριθμό περιστροφής $\frac{1}{20}$ δεν είναι αμελητέα.

Όταν λοιπόν μια τροχιά βρίσκεται στο επίπεδο x_1x_2 ή στο x_3x_4 ή και στα δύο, σε ζώνες οι οποίες επηρεάζονται από περισσότερους από 1 συντονισμούς οι προβολές και στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 και x_2x_4 γίνονται πολυπλοκότερες, αφού δεν επηρεάζονται πλέον από την ύπαρξη μόνο δύο συντονισμών.

8. Ο εμπειρικός νόμος για το εύρος των συντονισμών (Σχέση B.4.1) ισχύει με αρκετή ακρίβεια για όλους τους συντονισμούς που εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 , γιατί περιγράφει ικανοποιητικά τα χαρακτηριστικά των τροχιών σ' αυτό το επίπεδο, αν και βρέθηκε χρησιμοποιώντας αριθμητικά δεδομένα μόνο για λίγους συντονισμούς μικρής σχετικά τάξης. Για παράδειγμα θεωρώντας ότι η σχέση (B.4.1) έχει γενική ισχύ, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη δυνατή τάξη των συντονισμών που εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 . Οι τιμές που βρίσκουμε με αυτή τη διαδικασία για διάφορες τιμές της παραμέτρου μ (Σχέσεις B.3.3.15, 19 και 23), βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τις εμπειρικά προσδιορισμένες τιμές (Σχέσεις B.3.3.10, 20 και 22 αντίστοιχα).

Αν τοποθετήσουμε στο επίπεδο x_1x_2 τις ζώνες των διαφόρων συντονισμών $\frac{m}{n}$ θεωρώντας ότι προσεγγιστικά είναι οριζόντιες λωρίδες εύρους W (Σχέση B.4.1) συμμετρικά τοποθετημένες ως προς τον άξονα $x_2 = -2\pi \frac{m}{n} (\text{mod } 2\pi)$ σύμφωνα με τη σχέση (B.3.3.14), βλέπουμε ότι δημιουργούνται περιοχές επικάλυψης αυτών των ζωνών, όπως και συμβαίνει στην πραγματικότητα. Άρα η σχέση (B.4.1) μπορεί να μας περιγράψει και αυτό το χαρακτηριστικό των τροχιών στο επίπεδο x_1x_2 .

9. Οι σχηματισμοί που περιγράψαμε στα διάφορα επίπεδα προβολής, αποτελούν γενικά δομικά χαρακτηριστικά της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης μ ($\mu \leq 10^{-1}$). Οι δομές στο επίπεδο προβολής x_1x_2 παράγονται από τροχιές με αρχικές συνθήκες, οποιοδήποτε σημείο με συντεταγμένες εκτός της κεντρικής νησίδας (Σχήμα B.4) στο επίπεδο x_1x_2 και οπουδήποτε στο επίπεδο x_3x_4 . Ενώ για να έχει μια τροχιά στα επίπεδα x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 , x_2x_4 και x_3x_4 τη συμπεριφορά που περιγράφουμε στην παράγραφο B.3.2, πρέπει οι συντεταγμένες της αρχικής της συνθήκης στο επίπεδο x_3x_4 να βρίσκονται πολύ κοντά στο σημείο $x_3 = x_4 = 0$, ενώ στο επίπεδο x_1x_2 έξω από την κεντρική νησίδα. Άρα πλήθος τετραδιάστατων τροχιών επηρεάζονται από τα χαρακτηριστικά της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1), οπότε οι δομές που εμφανίζονται στα διάφορα επίπεδα αποτελούν βασικά χαρακτηριστικά στοιχεία της τετραδιάστατης απεικόνισης και δεν είναι κάποιοι μεμονωμένοι τυχαίοι σχηματισμοί.

10. Οι μη περιοδικές τροχιές, τα σημεία των οποίων δημιουργούν στα διάφορα επίπεδα προβολής τις δομές που περιγράψαμε στην παράγραφο Β.3, παρουσιάζουν μια ασθενή χαοτική συμπεριφορά, η οποία αυξάνει όταν αυξάνει η τιμή της παραμέτρου σύζευξης μ . Αυτό γίνεται αντιληπτό από την τάση του θετικού ορίου στο οποίο δείχνει ότι τείνει ο χαρακτηριστικός εκθέτης Liapunov των τροχιών, να αυξάνει με την αύξηση της τιμής της παραμέτρου μ . Παρά το χαοτικό τους χαρακτήρα οι τροχιές αυτές δημιουργούν καλά καθορισμένες δομές για αρκετά μεγάλα χρονικά διαστήματα, (κυρίως για μικρές τιμές της παραμέτρου μ) αφού αυτές οι δομές επαναλαμβάνονται όταν η τροχιά επανέρχεται στην περιοχή απ' όπου ξεκίνησε (στο επίπεδο x_1x_2) έπειτα από T_1 (Σχέση B.3.3.17) επαναλήψεις της απεικόνισης.

11. Η επίδραση των χαρακτηριστικών της διδιάστατης απεικόνισης (B.2.1) στις μορφές που παρουσιάζονται στα επίπεδα προβολής της τετραδιάστατης απεικόνισης (B.1.1) και κυρίως στο επίπεδο x_1x_2 , είναι σημαντική όταν η τιμή της παραμέτρου σύζευξης μ παραμένει σχετικά μικρή ($\mu \leq 10^{-1}$). Για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου οι τροχιές παρουσιάζουν εντονότερη χαοτική συμπεριφορά, τα σημεία που εμφανίζονται στο επίπεδο x_1x_2 σε κάθε πέρασμα της τροχιάς από την περιοχή της αρχικής της συνθήκης μειώνονται δραστικά (Σχέση B.3.3.17), με αποτέλεσμα να μη σχηματίζονται καθαρά οι ζώνες των διαφόρων συντονισμών και να μην εμφανίζονται πλέον οι δομές που είχαμε όταν $\mu \leq 10^{-1}$.

Μελετήσαμε λοιπόν μια τετραδιάστατη συμπλεκτική απεικόνιση στην προσπάθεια μας να βρούμε κάποια μορφή συνέχειας στη μετάβαση από ένα σύστημα δύο (διδιάστατη απεικόνιση) σε ένα σύστημα τριών (τετραδιάστατη απεικόνιση) βαθμών ελευθερίας και είδαμε ότι η επίδραση των χαρακτηριστικών της διδιάστατης απεικόνισης στις δομές του τετραδιάστατου χώρου φάσεων είναι ισχυρή όταν οι τιμές της παραμέτρου σύζευξης είναι μικρές.

Μέρος Γ

Μελέτη της πρακτικής ευστάθειας στο
επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών
σωμάτων. Εφαρμογή στο σύστημα
ΤΗΛΙΟΥ - ΔΙΑ - ΑΣΤΕΡΟΕΙΔΗ

Γ.1. Εισαγωγή.

Η μελέτη ενός Χαμιλτονιανού συστήματος N βαθμών ελευθερίας στη γειτονιά ενός ελλειπτικού σημείου ισορροπίας, ανάγεται, όπως είναι γνωστό, στη μελέτη της Χαμιλτονιανής :

$$H(x,y) = \sum_{s \geq 2} H_s(x,y) \quad (\Gamma.1.1),$$

όπου :

$$H_2(x,y) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j}{2} (x_j^2 + y_j^2) \quad (\Gamma.1.2),$$

και οι όροι $H_s(x,y)$ για $s \geq 3$, είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού s των κανονικών μεταβλητών $x, y \in \mathbb{R}^N$. Σημειώνουμε ότι τα σύμβολα x και y αντιστοιχούν στις μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_N και y_1, y_2, \dots, y_N αντίστοιχα. Θεωρούμε επίσης ότι οι συγνότητες ω_j , $j=1,2,\dots,N$ είναι διάφορες του μηδενός και ότι η Χαμιλτονιανή ($\Gamma.1.1$) είναι αναλυτική συνάρτηση σε μια περιοχή του σημείου $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{2N}$.

Η Χαμιλτονιανή ($\Gamma.1.2$) αντιστοιχεί σ' ένα ολοκληρώσιμο κατά Liouville σύστημα αφού οι N ποσότητες :

$$I_j = \frac{1}{2} (x_j^2 + y_j^2), \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.1.3),$$

είναι N ανεξάρτητα ολοκληρώματα της κίνησης σε ενέλιξη μεταξύ τους. Επομένως ο χώρος φάσεων του συστήματος καλύπτεται από αμετάβλητους τόρους, οπότε στο σύστημα εμφανίζεται μόνο περιοδική και ημιπεριοδική κίνηση. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Χαμιλτονιανή ($\Gamma.1.1$) αποτελεί μια διαταραγμένη μορφή της ολοκληρώσιμης Χαμιλτονιανής ($\Gamma.1.2$) αφού για $s=2$ ταυτίζονται.

Το βασικό ερώτημα που γεννιέται είναι αν η συμπεριφορά του συστήματος ($\Gamma.1.1$) διαφέρει σημαντικά από αυτή του ($\Gamma.1.2$). Συγκεκριμένα, προσπαθεί κανείς να δείξει, χρησιμοποιώντας την κλασσική θεωρία διαταραχών, ότι ο χώρος φάσεων του διαταραγμένου συστήματος συνεχίζει να καλύπτεται από ένα συνεχές σύνολο αμετάβλητων τόρων, οι οποίοι βρίσκονται πολύ κοντά στους τόρους του αδιατάρακτου συστήματος, οπότε η κίνηση συνεχίζει να είναι περιοδική ή ημιπεριοδική πάνω σ' αυτούς τους τόρους. Υπάρχουν δύο μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το

παραπάνω πρόβλημα. Σύμφωνα με την πρώτη (Birkhoff 1927) προσπαθούμε να βρούμε έναν κανονικό μετασχηματισμό $(x,y) \rightarrow (x',y')$, με τον οποίο η μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή $H'(x',y')$ του συστήματος να είναι σε κανονική μορφή (normal form), δηλαδή να είναι συνάρτηση μόνο των N ποσοτήτων $I_j = \frac{1}{2}(x_j'^2 + y_j'^2)$, $j=1,2,\dots,N$ οπότε το σύστημα θα είναι ολοκληρώσιμο κατά Liouville. Ακολουθώντας τη δεύτερη μέθοδο, η οποία χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Whittaker (1916) και Cherry (1924a,b), προσπαθούμε να κατασκευάσουμε N ανεξάρτητα μεταξύ τους ολοκληρώματα τα οποία είναι διαταραγμένες μορφές των ολοκληρωμάτων (Γ.1.3) του ολοκληρώσιμου συστήματος (Γ.1.2), οπότε αφού δε χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς συντεταγμένων εργαζόμαστε στις αρχικές συντεταγμένες (x,y) . Αυτές οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις είναι θεωρητικά ισοδύναμες αν και στην πρακτική εφαρμογή τους παρουσιάζουν κάποιες διαφορές στις οποίες θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Ο Poincaré (1892) απέδειξε ότι γενικά για το σύστημα (Γ.1.1) δεν υπάρχουν N ανεξάρτητα ολοκληρώματα, οπότε αυτό δεν είναι ολοκληρώσιμο κατά Liouville, παρότι θα μπορούσε κανείς να κατασκευάσει εύκολα συγκεκριμένα διαταραγμένα συστήματα της μορφής (Γ.1.1), τα οποία να είναι ολοκληρώσιμα. Άρα η προσπάθεια κατασκευής τέτοιων ολοκληρωμάτων με όποια από τις δύο μεθόδους και αν γίνει, γενικά αποτυγχάνει. Παρότι όμως δεν καταφέρνουμε να κατασκευάσουμε πραγματικά ολοκληρώματα του συστήματος, δημιουργούμε με τις παραπάνω μεθόδους τυπικά ολοκληρώματα (formal integrals), τα οποία έχουν τη μορφή δυναμοσειρών, οι οποίες γενικά αποκλίνουν, αλλά μπορούν να μας δώσουν σημαντικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του συστήματος.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις δύο μεθόδους που αναφέραμε προηγουμένως, αποδεικνύεται ότι το σύστημα (Γ.1.1) είναι τυπικά ολοκληρώσιμο όταν δεν υπάρχουν συντονισμοί μεταξύ των συχνοτήτων ω_j , $j=1,2,\dots,N$ του συστήματος, δηλαδή όταν η συνθήκη $|\vec{k} \cdot \vec{\omega}| \neq 0$ ικανοποιείται για κάθε $\vec{k} \neq 0$, όπου $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in Z^N$ και δεδομένο $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$. Η μέθοδος της κατασκευής της κανονικής μορφής του συστήματος έχει το πλεονέκτημα ότι γενικεύεται εύκολα στην περίπτωση όπου υπάρχουν συντονισμοί μεταξύ των συχνοτήτων (Gustavson 1966). Υποθέτουμε λοιπόν, ότι υπάρχουν $N' < N$ ανεξάρτητες μεταξύ τους σχέσεις συντονισμού ανάμεσα στις συχνότητες, δηλαδή υπάρχουν N' ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{k} \in Z^N$ τέτοια ώστε $\vec{k} \cdot \vec{\omega} = 0$. Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν $N - N'$ ανεξάρτητα τυπικά ολοκληρώματα (ως προς τις μεταβλητές x, y), σε μορφή δυναμοσειράς με πρώτο όρο ένα γραμμικό συνδυασμό των ποσοτήτων I_j , $j=1,2,\dots,N$ (Σχέση Γ.1.3). Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τυπικά ολοκληρώματα $\Phi^{(i)}$ σε μορφή δυναμοσειρών :

$$\Phi^{(i)} = I_j + \sum_{s \geq 3} \Phi_s^{(i)}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.1.4),$$

λύνοντας την εξίσωση :

$$[H, \Phi^{(i)}] = 0, \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.1.5)$$

(Σχέση A.1.8), σταδιακά για κάθε τάξη $s \geq 2$. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε με επιτυχία από πολλούς ερευνητές, όπως για παράδειγμα από τους Contopoulos (1960, 1963), Contopoulos & Moutoulas (1965, 1966) και Barbanis (1966). Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (Γ.1.5) λύνεται χωρίς προβλήματα όταν δεν υπάρχει κανένας συντονισμός μεταξύ των συχνοτήτων ω_j , $j=1,2,\dots,N$ της αδιατάρακτης Χαμιλτονιανής (Γ.1.2) και όταν η γενική Χαμιλτονιανή $H(x,y)$ (Σχέση Γ.1.1) είναι άρτια συνάρτηση ως προς τις γενικευμένες ορμές :

$H(x,-y)=H(x,y)$ (Diana et al. 1975, Giorgilli 1988). Όταν δεν υπάρχουν συντονισμοί, αλλά δεν ισχύει η σχέση $H(x,-y)=H(x,y)$, συμπεραίνουμε ύμμεσα ότι η εξίσωση (Γ.1.5) λύνεται αφού μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη τυπικών ολοκληρωμάτων με τη μέθοδο της κανονικής μορφής. Αντιθέτως όταν υπάρχουν $N' < N$ συντονισμοί ανάμεσα στις συχνότητες, η κατάσταση δεν είναι τόσο απλή παρά το ότι η ύπαρξη N' τυπικών ολοκληρωμάτων μπορεί να αποδειχτεί και πάλι ύμμεσα μέσω της μεθόδου της κανονικής μορφής. Αυτό συμβαίνει γιατί στη λύση της εξίσωσης (Γ.1.5) εμφανίζονται κάποιοι αυθαίρετοι όροι οι οποίοι πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα ώστε να μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση για όλο και μεγαλύτερες τάξεις s. Οι Giorgilli & Galgani (1978) εξέτασαν αυτό το πρόβλημα λεπτομερώς.

Μπορούμε να εξαγάγουμε ακριβή αποτελέσματα, τα οποία μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη τροχιών, οι οποίες βρίσκονται πάντα κοντά στην περιοχή του ελλειπτικού σημείου ισορροπίας, χρησιμοποιώντας το θεώρημα K.A.M.. Θα αναφερθούμε στη συνέχεια στα γενικά ποιοτικά αποτελέσματα του θεωρήματος. Το βασικό στοιχείο είναι ότι δεν προσπαθούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του συστήματος σ' όλο το χώρο φάσεων, αλλά επικεντρώνουμε την προσοχή μας γύρω από ένα ελλειπτικό σημείο ισορροπίας. Το συμπέρασμα του θεωρήματος K.A.M. είναι ότι οι τόροι του αδιατάρακτου ολοκληρώσιμου συστήματος, οι συχνότητες των οποίων βρίσκονται "μακριά" από συντονισμούς, διατηρούνται και στο διαταραγμένο σύστημα, όταν η διαταραχή είναι αρκετά μικρή, και είναι μόνο λίγο παραμορφωμένοι σε σχέση με τους τόρους του αδιατάρακτου προβλήματος. Επομένως υπάρχουν αρχικές συνθήκες γύρω από το σημείο ισορροπίας που οδηγούν στην εμφάνιση ημιπεριοδικής κίνησης στο διαταραγμένο σύστημα. Το επόμενο λογικό ερώτημα είναι "πόσες" αρχικές συνθήκες οδηγούν σε ημιπεριοδική κίνηση. Από τη σκοπιά της θεωρίας μέτρου, η απάντηση είναι ότι η πλειοψηφία των αρχικών συνθηκών βρίσκονται πάνω σε αμετάβλητους τόρους, τουλάχιστον για μικρές διαταραχές. Από τοπολογική άποψη όμως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Το σύνολο των αμετάβλητων τόρων δεν είναι πουθενά πυκνό στο χώρο φάσεων με αποτέλεσμα, το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου στην επιφάνεια σταθερής ενέργειας να αποτελείται από περιοχές, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους για $N>2$. Εξετάζοντας τώρα τη μορφή της κίνησης που δημιουργείται γύρω από το ελλειπτικό σημείο αντιλαμβανόμαστε ότι η πλειοψηφία των αρχικών συνθηκών δημιουργούν ημιπεριοδικές τροχιές, οι οποίες βρίσκονται πάνω σε αμετάβλητους τόρους. Στα συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας ($N=2$) οι τροχιές με αρχικές συνθήκες ανάμεσα στους αμετάβλητους τόρους μένουν συνεχώς σ' αυτήν την περιοχή, άρα παραμένουν συνεχώς πολύ κοντά στους τόρους του αδιατάρακτου συστήματος που ορίζουν οι αρχικές τους συνθήκες. Αντίθετα στα συστήματα με $N>2$ οι τροχιές με αρχικές συνθήκες ανάμεσα στους αμετάβλητους τόρους μπορούν, θεωρητικά να βρεθούν πολύ μακριά από τους αδιατάρακτους τόρους που ορίζουν οι αρχικές τους συνθήκες. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται διάχυση Arnold. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα K.A.M. μπορούμε να αποδείξουμε ότι γενικά σε μια περιοχή γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας, το σύνολο των αρχικών συνθηκών των τροχιών που παραμένουν για πάντα στην περιοχή του σημείου ισορροπίας, έχει σχετικά μεγάλο μέτρο.

Υπάρχει όμως και ένας εναλλακτικός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος της συμπεριφοράς του Χαμιλτονιανού συστήματος (Γ.1.1) γύρω από το σημείο ισορροπίας, ο οποίος βασίζεται στη θεωρία που αναπτύχθηκε από το Nekhoroshev (1971,1977,1979). Προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι οι τροχιές με αρχικές συνθήκες σε μια ανοιχτή περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας παραμένουν στη γειτονιά αυτού του σημείου για πάρα πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο χρόνο, σε αντίθεση με την προηγούμενη αντιμετώπιση όπου εξετάζαμε τη συμπεριφορά των τροχιών για άπειρο χρόνο. Ο σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η επίδραση της διάχυσης Arnold είναι τόσο μικρή ώστε να γίνεται ουσιαστικά αισθητή μετά από πάρα πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι το σύστημα (Γ.1.1) έχει κάποια προσεγγιστικά ολοκληρώματα η χρονική αλλαγή των οποίων είναι μικρή για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Αυτά τα

προσεγγιστικά ολοκληρώματα είναι τα τυπικά ολοκληρώματα της σχέσης (Γ.1.4) τα οποία όμως έχουν αναπτυχθεί μέχρι κάποια ορισμένη τάξη τ . Καταφέρνουμε λοιπόν έτσι να αποδείξουμε τον περιορισμό των τροχιών σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα, μεγαλύτερα ακόμα και από την ίδια την ηλικία του σύμπαντος, οπότε μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα παρουσιάζει πρακτική ευστάθεια (practical ή effective stability). Μελέτες βασιζόμενες σ' αυτές τις ιδέες έχουν ήδη δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πρακτικές εφαρμογές (Giorgilli & Galgani 1985, Giorgilli et al. 1989, Simó, 1989, Celletti & Giorgilli 1991). Μια λεπτομερέστερη περιγραφή της θεωρίας του Nekhoroshev θα γίνει στην επόμενη παράγραφο.

Το φυσικό πρόβλημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε τη θεωρία του Nekhoroshev είναι το επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων (Szebehely 1967), το οποίο αποτελεί την απλούστερη δυνατή προσέγγιση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης τριών σωμάτων. Συγκεκριμένα το πρόβλημα που θα μελετήσουμε είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε δύο σώματα τα οποία περιστρέφονται σε κυκλικές τροχιές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας τους υπό την επίδραση της αμοιβαίας βαρυτικής τους έλξης. Έστω τώρα ένα τρίτο σώμα το οποίο έλκεται από τα δύο προηγούμενα, χωρίς όμως να επηρεάζει την κίνησή τους (θεωρούμε ότι η μάζα του είναι πολύ μικρότερη από τις μάζες των δύο αρχικών σωμάτων, οπότε η βαρυτική του επίδραση επάνω τους είναι αμελητέα), το οποίο κινείται στο επίπεδο που περιστρέφονται τα δύο αρχικά σώματα. Η περιγραφή της κίνησης αυτού του σώματος αποτελεί το επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων. Γενικεύοντας το παραπάνω πρόβλημα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι τα δύο βασικά σώματα κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές, όπως επίσης και ότι η κίνηση του τρίτου σώματος γίνεται σ' ένα χώρο 3 διαστάσεων και δεν περιορίζεται στο επίπεδο κίνησης των δύο άλλων σωμάτων. Στη συνέχεια δε θα ασχοληθούμε με αυτές τις γενικότερες μορφές του προβλήματος αλλά θα εξετάσουμε το επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα εφαρμόζοντάς το στο σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή. Δηλαδή θεωρούμε ότι τα δύο σώματα που περιστρέφονται σε κυκλικές τροχιές είναι ο Ήλιος και ο Δίας και ότι στο επίπεδο περιστροφής τους βρίσκεται ένας αστεροειδής, η κίνηση του οποίου θα μας απασχολήσει.

Στο επίπεδο περιστροφής του Ήλιου και του Δία υπάρχουν 5 σημεία ισορροπίας για τον αστεροειδή. Τα σημεία αυτά ονομάζονται σημεία του Lagrange και συμβολίζονται L_1 , L_2 , L_3 , L_4 και L_5 . Τα σημεία L_1 , L_2 , L_3 βρίσκονται συνεχώς στην ευθεία που συνδέει τον Ήλιο με το Δία και είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας. Αντίθετα τα σημεία L_4 και L_5 βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας που συνδέει τον Ήλιο με το Δία σε συμμετρικές ως προς αυτήν θέσεις και το κάθε ένα σχηματίζει με τον Ήλιο και το Δία ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Τα σημεία L_4 και L_5 στο σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή είναι γραμμικά ευσταθή και έχουν ιδιαιτέρως μεγάλη σημασία αφού, γύρω από αυτά στο πραγματικό ηλιακό σύστημα υπάρχουν αρκετοί αστεροειδείς, οι οποίοι ονομάζονται Τρωικοί αστεροειδείς.

Θα μελετήσουμε λοιπόν την ευστάθεια του σημείου L_4 (λόγω συμμετρίας η ίδια μελέτη ισχύει και για το L_5) στο επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή, χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Nekhoroshev, για χρονικά διαστήματα της τάξης της ηλικίας του σύμπαντος, όταν η Χαμιλτονιανή του συστήματος βρίσκεται σε κανονική μορφή (normal form).

Το πρόβλημα αυτό έχει ήδη μελετηθεί στα πλαίσια της θεωρίας του Nekhoroshev από τους Giorgilli et al. (1989), Simó (1989) και Celletti & Giorgilli (1991). Συνδυάζοντας αναλυτικές μεθόδους και αριθμητικούς υπολογισμούς προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι οι τροχιές, οι αρχικές συνθήκες των οποίων βρίσκονται αρκετά κοντά στο σημείο L_4 (στο χώρο φάσεων), παραμένουν στη γειτονιά του L_4 για πολύ μεγάλο χρόνο ίσο με την ηλικία του σύμπαντος. Βρίσκουμε με αυτόν τον τρόπο μια περιοχή του χώρου φάσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας, τέτοια ώστε να μπορούμε να εγγυηθούμε την πρακτική ευστάθεια

όλων των τροχιών με αρχικές συνθήκες μέσα σ' αυτήν την περιοχή. Το ερώτημα είναι κατά πόσο η περιοχή που βρίσκουμε έχει κάποιο πρακτικό νόημα, δεν έχει δηλαδή αμελητέο μέγεθος. Για να έχει φυσικό νόημα η περιοχή πρακτικής ευστάθειας πρέπει να εξετάσουμε αν περιέχει κάποιους από τους γνωστούς αστεροειδείς που βρίσκονται γύρω από το σημείο L₄. Τα αποτελέσματα των Simó (1989) και Celletti & Giorgilli (1991) ήταν ρεαλιστικά αφού κατάφεραν να εξασφαλίσουν την πρακτική ευστάθεια του συστήματος σε μια περιοχή γύρω από το σημείο L₄ το μέγεθος της οποίας ήταν της τάξης των 10⁴ Km. Δυστυχώς όμως όπως αναφέρουν οι Celletti & Giorgilli παρότι το μέγεθος αυτό δεν είναι αμελητέο, η περιοχή στην οποία βρίσκονται οι πραγματικοί αστεροειδείς είναι μεγαλύτερη της περιοχής πρακτικής ευστάθειας κατά έναν παράγοντα 300 (στην καλύτερη περίπτωση) ως 9.000 (στη χειρότερη).

Καταφέραμε να βελτιώσουμε σημαντικά τα παραπάνω αποτελέσματα κάνοντας τρεις βασικές αλλαγές στον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος σε σχέση με τις προηγούμενες εργασίες. Οι αλλαγές αυτές αφορούσαν την εκλογή ενός καταλληλότερου συστήματος συντεταγμένων, ως προς το οποίο μελετήσαμε το σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή, την επιλογή μιας καλύτερης νόρμας στη διαδικασία υπολογισμού της μέγιστης τιμής διαφόρων συναρτήσεων και τη δυνατότητα ανάπτυξης διαφόρων σειρών μέχρι τάξη μεγαλύτερη από τις προηγούμενες εργασίες.

Γνωρίζουμε από διάφορους αριθμητικούς υπολογισμούς ότι η προβολή της περιοχής ευστάθειας γύρω από το σημείο L₄ έχει σχήμα "μπανάνας" και βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο τον Ήλιο και ακτίνα περίπου ίση με την απόσταση Ήλιου - Δία (Szebehely 1967). Σε όλες τις προηγούμενες μελέτες η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του προβλήματος αναπτυσσόταν σε σειρά ως προς καρτεσιανές συντεταγμένες γύρω από το σημείο ισορροπίας L₄. Είναι φανερό ότι μια τέτοια επιλογή δεν είναι η καλύτερη δυνατή, αφού χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες προσπαθούμε να περιγράψουμε μια περιοχή κυκλικού σχήματος. Γι' αυτό το λόγο στη μελέτη μας χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες, οι οποίες μπορούν να περιγράψουν τέτοιες μορφές καλύτερα. Αυτή η αλλαγή είναι ο σημαντικότερος παράγοντας βελτίωσης των εκτιμήσεων του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας.

Η δεύτερη αλλαγή είναι ένα τεχνικό ζήτημα και έχει να κάνει με τον τρόπο υπολογισμού της μέγιστης τιμής μιας συνάρτησης, της οποίας γνωρίζουμε το ανάπτυγμα Taylor. Χρησιμοποιούμε μια καλύτερη νόρμα σε σχέση με τις προηγούμενες εργασίες, στην οποία θα αναφερθούμε λεπτομερώς στην παράγραφο Γ.5.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Nekhoroshev οι σειρές που εμφανίζονται στην κλασσική θεωρία διαταραχών έχουν ασυμπτωτικό χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάποιο σημείο βρίσκουμε μια βέλτιστη τιμή για την τάξη μέχρι την οποία γίνονται τα διάφορα αναπτύγματα, για την οποία παίρνουμε τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα για το μέγεθος της περιοχής πρακτικής ευστάθειας. Πρακτικά η τιμή της βέλτιστης τάξης μπορεί να είναι τόσο μεγάλη, ώστε να είναι αδύνατο να αναπτύξουμε αριθμητικά στον υπολογιστή τις διάφορες συναρτήσεις μέχρι αυτή την τάξη. Για να μπορέσουμε να κάνουμε αναπτύγματα μέχρι όσο το δυνατόν υψηλότερη τάξη επιλέξαμε να μελετήσουμε το επίπεδο πρόβλημα των τριών σωμάτων και όχι το χωρικό πρόβλημα, στο οποίο ο αστεροειδής μπορεί να κινηθεί και εκτός του επιπέδου περιστροφής του Ήλιου και του Δία. Έτσι το σύστημα μας είναι ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας και όχι τριών, όπως είναι το χωρικό πρόβλημα που είχε μελετηθεί σε προηγούμενες εργασίες. Αυτή η μείωση των βαθμών ελευθερίας μάς δίνει τη δυνατότητα να αναπτύξουμε τις διάφορες σειρές μέχρι και τάξη 35, αντί της μέγιστης τάξης 22, μέχρι την οποία είχαν φτάσει τους αριθμητικούς τους υπολογισμούς οι Celletti & Giorgilli (1991). Σημειώνουμε εδώ ότι από τη μελέτη της πρακτικής ευστάθειας για τους πραγματικούς αστεροειδείς, βλέπουμε ότι μερικές φορές η βέλτιστη τάξη είναι μικρότερη από 34, οπότε πιστεύουμε ότι κάνοντας αναπτύγματα μέχρι τάξη 35 είμαστε

σχετικά κοντά στην πραγματική βέλτιστη τάξη. Το ζήτημα αυτό θα εξεταστεί αναλυτικότερα στην παράγραφο Γ.6.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο στους γνωστούς Τρωικούς αστεροειδείς είδαμε ότι οι αλλαγές που κάναμε έδωσαν ρεαλιστικά αποτελέσματα σαφώς βελτιωμένα σε σχέση με τα αποτελέσματα των προγενέστερων εργασιών. Πραγματικά 4 αστεροειδείς βρίσκονται μέσα στην περιοχή για όποια έχουμε πρακτική ευστάθεια, οπότε θα παραμείνουν εκεί για χρόνο τουλάχιστον ίσο με την ηλικία του σύμπαντος. Επίσης η πλειοψηφία των υπολοίπων αστεροειδών βρίσκεται σε περιοχές μεγαλύτερες της περιοχής πρακτικής ευστάθειας κατά ένα παράγοντα 10. Επομένως είναι πιθανό ότι μια περαιτέρω βελτίωση της μεθόδου που ακολουθήσαμε, θα οδηγήσει στην εξασφάλιση της πρακτικής ευστάθειας για όλους σχεδόν τους αστεροειδείς.

Η διάχυνση Arnold, η οποία όπως έχουμε ήδη αναφέρει μπορεί να οδηγήσει κάποιες τροχιές που ξεκινούν κοντά στο σημείο L_4 , σε περιοχές του χώρου φάσεων αρκετά μακριά από αυτό, εμφανίζεται στο τρισδιάστατο σύστημα και όχι στο επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα, το οποίο μελετήσαμε. Επομένως στους υπολογισμούς μας δεν έχουμε λάβει υπ' όψη μας αυτό το φαινόμενο, το οποίο επηρεάζει το τρισδιάστατο πρόβλημα. Παρόλα αυτά οι αλλαγές που επιφέραμε στη μέθοδο υπολογισμού της περιοχής πρακτικής ευστάθειας, βελτίωσαν σημαντικά τα προγενέστερα αποτελέσματα, έστω και αν αρχικά εφαρμόσαμε αυτή τη διαδικασία στο διδιάστατο σύστημα, κυρίως για λόγους ευκολίας στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Η μέθοδος αυτή όμως μπορεί να γενικευτεί και να εφαρμοστεί σε συστήματα περισσοτέρων βαθμών ελευθερίας, αφού η πρώτη εφαρμογή της στο διδιάστατο σύστημα ήταν επιτυχής.

Στην παράγραφο Γ.2 αναφερόμαστε αναλυτικότερα στη θεωρία Nekhoroshev εξηγώντας πως μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια των τροχιών για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα, χωρίς όμως να μπούμε σε τεχνικά ζητήματα δίνοντας λεπτομερείς αποδείξεις των διαφόρων σχέσεων. Στην παράγραφο Γ.3 εξετάζουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση του επιπέδου περιορισμένου προβλήματος των τριών σωμάτων, δίνοντας όλους τους μετασχηματισμούς που εφαρμόζουμε σ' αυτή, ώστε να έρθει στη μορφή (Γ.1.1). Ο τρόπος κατασκευής της κανονικής μορφής της Χαμιλτονιανής περιγράφεται στην παράγραφο Γ.4. Ο τρόπος εύρεσης της περιοχής πρακτικής ευστάθειας αναλύεται στην παράγραφο Γ.5, όπου αναφερόμαστε επίσης και στη νόρμα που χρησιμοποιούμε για την εύρεση της μέγιστης τιμής μιας συνάρτησης υπό μορφή δυναμοσειράς. Στην παράγραφο Γ.6 αναφερόμαστε στα αριθμητικά αποτελέσματα που έχουμε για το σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή. Υπολογίζουμε το μέγεθος της περιοχής πρακτικής ευστάθειας και εξετάζουμε αν οι πραγματικοί αστεροειδείς βρίσκονται εντός ή εκτός αυτής της περιοχής. Επίσης δίνουμε κάποιες αριθμητικές ενδείξεις, οι οποίες εξασφαλίζουν την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μας. Τέλος στην παράγραφο Γ.7 συνοψίζουμε όλα τα αποτελέσματά μας και αναφέρουμε τα συμπεράσματα της μελέτης μας.

Γ.2. Θεωρία Nekhoroshev.

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια τη θεωρία του Nekhoroshev παρουσιάζοντας τα βασικά της συμπεράσματα χωρίς να δώσουμε τις ακριβείς αποδείξεις των σχέσεων και των θεωρημάτων που θα αναφέρουμε. Οι πλήρεις αποδείξεις βρίσκονται στην εργασία του Giorgilli (1988), όπου το ίδιο θέμα εξετάζεται λεπτομερώς.

Πριν αναφερθούμε στο τεχνικό μέρος της θεωρίας του Nekhoroshev θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα αποτελέσματα της. Προσπαθούμε να εγγυηθούμε την ύπαρξη μιας περιοχής πρακτικής ευστάθειας γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας

ενός Χαμιλτονιανού δυναμικού συστήματος. Οι τροχιές με αρχικές συνθήκες μέσα σ' αυτήν την περιοχή θα παραμείνουν στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας για πεπερασμένο αλλά πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα Χαμιλτονιανό σύστημα της μορφής (Γ.1.1) με αρχικές τιμές $I_j(t=0) = I_{j,0}$, $j=1,2,\dots,N$ για τις ποσότητες :

$$I_j = \frac{1}{2} (x_j^2 + y_j^2), \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.1).$$

Καθώς το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο οι τιμές των ποσοτήτων (Γ.2.1) μεταβάλλονται. Για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη περιοχής πρακτικής ευστάθειας αρκεί να αποδείξουμε ότι οι τιμές των ποσοτήτων (Γ.2.1) φράσσονται για ορισμένο χρονικό διάστημα, από κάποιες μέγιστες τιμές $I_{j,max}$, $j=1,2,\dots,N$, δηλαδή έχουμε :

$$I_j(t) < I_{j,max}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.2).$$

Ο συνηθέστερος τρόπος για να αντιμετωπίσουμε τέτοια προβλήματα στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας διαταραχών είναι να θεωρήσουμε αρχικά ότι οι συχνότητες ω_j , $j=1,2,\dots,N$ (Σχέση Γ.1.2) ικανοποιούν τη διοφαντική σχέση :

$$|\vec{k} \cdot \vec{\omega}| \geq \gamma |k|^{-\tau} \quad (\Gamma.2.3),$$

για κάθε $\vec{k} \in Z^N$, όπου $\gamma > 0$, $\tau > N-1$ και $|k| = |k_1| + \dots + |k_N|$. Η σχέση αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός συνόλου τιμών των συχνοτήτων ω_j , $j=1,2,\dots,N$ μεγάλου μέτρου, για το οποίο οι συχνότητες βρίσκονται μακριά από κάθε συντονισμό. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε προσεγγιστικά ολοκληρώματα της μορφής :

$$\Phi^{(j,r)} = I_j + \sum_{s=3}^r \Phi_s^{(j)} , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.4),$$

τα οποία είναι πολυώνυμα βαθμού r . Συγκεκριμένα οι όροι $\Phi_s^{(j)}$ υπολογίζονται αν απαιτήσουμε :

$$\dot{\Phi}^{(j,r)} = [H, \Phi^{(j,r)}] = R^{(j,r)}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.5),$$

όπου $R^{(j,r)}$ μια σειρά βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με $r+1$. Ξεχνώντας την ύπαρξη του πολυωνύμου $R^{(j,r)}$, θεωρώντας δηλαδή ότι οι ποσότητες $\Phi^{(j,r)}$ είναι πραγματικά ολοκληρώματα του συστήματος (Γ.1.1), η χρονική μεταβολή των τιμών των ποσοτήτων I_j (Σχέση Γ.2.1) καθορίζεται από τις τιμές των ποσοτήτων $|\Phi^{(j,r)} - I_j|$. Οι ποσότητες αυτές είναι ανάλογες του όρου ρ^3 όπου $\rho \equiv \max_j \sqrt{2I_{j,0}}$. Επομένως η ύπαρξη του όρου $R^{(j,r)}$ επιφέρει μια αργή χρονική μεταβολή του ολοκληρώματος $\Phi^{(j,r)}$, η οποία φράσσεται γενικά από μια ποσότητα της μορφής $C_r \cdot \rho^{r+1}$ όπου C_r ένας κατάλληλος συντελεστής. Θεωρώντας ότι η μεταβολή $|\Phi^{(j,r)}(t) - \Phi^{(j,r)}(0)|$ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τον όρο ρ^3 ,

προσδιορίζουμε τελικά τα όρια $I_{j,\max}$, $j=1,2,\dots,N$, οπότε οι σχέσεις (Γ.2.2) ισχύουν για χρονικά διαστήματα :

$$T_r \propto C_r^{-1} \cdot \rho^{-(r-2)} \quad (\Gamma.2.6).$$

Η τιμή της ποσότητας C_r αυξάνει ανάλογα με μια ποσότητα $\rho_*^{-(r-2)} \cdot [(r)!]^{r+1}$ όπου ρ_* είναι μια σταθερά. Επομένως όλα τα αποτελέσματα εξαρτώνται από την τάξη r , μέχρι την οποία υπολογίζουμε τα προσεγγιστικά ολοκληρώματα $\Phi^{(i,r)}$. Η βέλτιστη τάξη ανάπτυξης r_{opt} των ολοκληρωμάτων είναι αυτή, για την οποία η επίδραση του πολυωνύμου $R^{(i,r)}$ γίνεται ελάχιστη, οπότε ο αντίστοιχος χρόνος ευστάθειας T είναι ο μέγιστος δυνατός. Αποδεικνύεται ότι $r_{\text{opt}} \propto (\rho_*/\rho)^{\frac{1}{r+1}}$ και ότι ο χρόνος T εκφράζεται συναρτήσει της ποσότητας ρ από τον τύπο :

$$T \propto \exp \left[\left(\rho_*/\rho \right)^{\frac{1}{r+1}} \right] \quad (\Gamma.2.7).$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος για τον οποίο η πρακτική ευστάθεια του συστήματος είναι εξασφαλισμένη, αυξάνει εκθετικά όταν η ενέργεια τείνει προς το μηδέν ($\rho \rightarrow 0 \Rightarrow I_j \rightarrow 0$ και $T \rightarrow \infty$).

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αναλυτικότερα τη θεωρία του Nekhoroshev. Αρχικά θα αναπτύξουμε τη μέθοδο που ακολουθούμε, στα πλαίσια της κλασσικής θεωρίας διαταραχών, για την κατασκευή τυπικών ολοκληρωμάτων του Χαμιλτονιανού συστήματος (Γ.1.1). Εστω Π_s ο γραμμικός χώρος με στοιχεία τα ομογενή πολυώνυμα βαθμού s ως προς τις κανονικές μεταβλητές $(x,y) = (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$ και ο γραμμικός τελεστής $L_{H_2} : \Pi_s \rightarrow \Pi_s$ όπου :

$$L_{H_2} \bullet = [H_2, \bullet] \quad (\Gamma.2.8).$$

Επομένως η Χαμιλτονιανή (Γ.1.1) αποτελείται από μια σειρά όρων $H_s \in \Pi_s$. Τα τυπικά ολοκληρώματα του συστήματος :

$$\Phi^{(j)} = I_j + \sum_{s=3} \Phi_s^{(j)}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.9),$$

υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης :

$$[H, \Phi^{(j)}] = 0 \quad (\Gamma.2.10).$$

Η εξίσωση (Γ.2.10) είναι ισοδύναμη με το επαναληπτικό σύστημα εξισώσεων :

$$L_{H_2} \Phi_s^{(j)} = \Psi_s^{(j)}, \quad s \geq 3 \quad (\Gamma.2.11),$$

όπου ο όρος $\Psi_s^{(j)} \in \Pi_s$ είναι γνωστός για κάθε τάξη s και δίνεται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned}\Psi_3^{(i)} &= - \left[H_3, I_j \right] \\ \Psi_s^{(i)} &= - \sum_{i=1}^{s-3} \left[H_{s-i}, \Phi_{i+2}^{(i)} \right] - \left[H_s, I_j \right], \quad s > 3\end{aligned}\quad (\Gamma.2.12).$$

Η αλγεβρική λύση της εξίσωσης (Γ.2.11) είναι σχετικά απλή. Εισάγουμε αρχικά νέες μιγαδικές μεταβλητές ξ και η μέσω του κανονικού μετασχηματισμού :

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_j + i \eta_j), \quad y_j = \frac{i}{\sqrt{2}} (\xi_j - i \eta_j), \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.13).$$

Σ' αυτές τις συντεταγμένες έχουμε :

$$H_2 = i \sum_j \omega_j \xi_j \eta_j, \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.14),$$

οπότε ο τελεστής L_{H_2} έχει διαγώνια μορφή. Συγκεκριμένα η δράση του πάνω στο μονώνυμο $\xi^m \eta^k = \xi^{m_1} \cdot \xi^{m_2} \cdots \xi^{m_N} \cdot \eta^{k_1} \cdot \eta^{k_2} \cdots \eta^{k_N}$ δίνει :

$$L_{H_2} \xi^m \eta^k = i [(\vec{k} - \vec{m}) \cdot \vec{\omega}] \xi^m \eta^k \quad (\Gamma.2.15).$$

Επομένως η δράση του τελεστή L_{H_2} πάνω σε μια συνάρτηση $f \in \Pi_s$, το ανάπτυγμα της οποίας στις μιγαδικές μεταβλητές είναι :

$$f(\xi, \eta) = \sum_{|m+k|=s} f_{mk} \cdot \xi^m \eta^k \quad (\Gamma.2.16),$$

όπου $|m+k| = \sum_{n=1}^N |m_n+k_n|$, δίνεται από τη σχέση :

$$L_{H_2} f = i \sum_{m,k} f_{mk} \cdot [(\vec{k} - \vec{m}) \cdot \vec{\omega}] \xi^m \eta^k \quad (\Gamma.2.17).$$

Εστω επίσης ότι το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\Psi_s^{(i)}$ στις μιγαδικές μεταβλητές ξ και η δίνεται από τη σχέση :

$$\Psi_s^{(i)} = \sum_{|m+k|=s} c_{mk} \cdot \xi^m \eta^k \quad (\Gamma.2.18),$$

όπου c_{mk} γνωστοί συντελεστές.

Ορίζοντας τώρα την εικόνα R_s του συνόλου Π_s , μέσω του τελεστή L_{H_2} (Σχέση Γ.2.8), καταλαβαίνουμε ότι η εξίσωση (Γ.2.11) μπορεί να λυθεί αν $\Psi_s^{(i)} \in R_s$. Ορίζουμε επίσης τον πυρήνα N_s ως την αντίστροφη εικόνα του μηδενικού στοιχείου του συνόλου Π_s , μέσω του τελεστή L_{H_2} . Εύκολα φαίνεται ότι τα σύνολα R_s και N_s είναι ξένοι μεταξύ τους γραμμικοί υπόχωροι του χώρου Π_s , ισχύει δηλαδή $N_s \cap R_s = \{\emptyset\}$ και $N_s \oplus R_s = \Pi_s$. Επομένως η εξίσωση (Γ.2.11) μπορεί να λυθεί αν η συνάρτηση $\Psi_s^{(i)}$ δεν έχει καμιά συνιστώσα μέσα στον υπόχωρο N_s , δεν περιέχει δηλαδή κανένα μονώνυμο $\xi^m \eta^k$ τέτοιο

ώστε $(\vec{k} - \vec{m}) \cdot \vec{\omega} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι οι συχνότητες ω_j , δε βρίσκονται σε κανενός είδους συντονισμό μεταξύ τους. Σ' αυτήν την περίπτωση η λύση της εξίσωσης (Γ.2.11) ορίζεται με την αυθαιρεσία ενός τυχαίου όρου $\tilde{\Phi}_s^{(i)}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση :

$$L_{H_2} \tilde{\Phi}_s^{(i)} = 0 \quad (\Gamma.2.19).$$

Επιλέγοντας όμως $\tilde{\Phi}_s^{(i)} = 0$ η λύση γίνεται μοναδική και δίνεται από τη σχέση :

$$\Phi_s^{(i)} = -i \sum_{|m+k|=s} \frac{c_{mk}}{(\vec{k} - \vec{m}) \cdot \vec{\omega}} \cdot \xi^m \eta^k \quad (\Gamma.2.20).$$

Ακριβέστερα για να μπορεί να λυθεί η εξίσωση (Γ.2.11) χωρίς κανένα πρόβλημα για όλες τις τάξεις $s \geq 3$ πρέπει όχι μόνο οι συχνότητες ω_j , $j=1,2,\dots,N$, να μη βρίσκονται σε συντονισμό αλλά και η συνάρτηση της Χαμιλτονιανής (Γ.1.1) να είναι άρτια ως προς τις ορμές, δηλαδή $H(x,y) = H(x,-y)$ (Diana et al. 1975). Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού βασίζεται σε δύο απλές παρατηρήσεις. Κατ' αρχήν από τη μη ύπαρξη συντονισμών μεταξύ των συχνοτήτων συνεπάγεται ότι τα μονώνυμα που ανήκουν στον υπόχωρο N_s είναι της μορφής $\xi^m \eta^m = \xi^{m_1} \cdot \xi^{m_2} \cdots \xi^{m_N} \cdot \eta^{m_1} \cdot \eta^{m_2} \cdots \eta^{m_N}$, οπότε στις κανονικές μεταβλητές x, y είναι άρτιες συναρτήσεις ως προς τις ορμές. Παρατηρούμε επίσης ότι η αγκύλη Poisson μεταξύ άρτιων ή περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση ενώ η αγκύλη Poisson μεταξύ μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης μας δίνει άρτια συνάρτηση. Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε επαγγειακά ότι η εξίσωση (Γ.2.11) μπορεί να λυθεί για κάθε τάξη s . Έστω λοιπόν ότι έχουμε υπολογίσει τις συναρτήσεις $\Phi_s^{(i)}$ μέχρι κάποια τάξη $s \geq 2$, οι οποίες είναι άρτιες ως προς τις ορμές (αυτό ισχύει για $s=2$ αφού $\Phi_2^{(i)} \equiv I_j$). Τότε η συνάρτηση $\Psi_{s+1}^{(i)}$ (Σχέση Γ.2.12) είναι περιττή ως προς τις ορμές, οπότε δεν έχει καμιά συνιστώσα στον υπόχωρο N_s , επομένως η συνάρτηση $\Phi_{s+1}^{(i)}$ υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (Γ.2.20). Το πως λύνεται η εξίσωση (Γ.2.11) όταν δεν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις εξετάστηκε για παράδειγμα από τους Giorgilli & Galgani (1978). Εμείς για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι η συνάρτηση (Γ.1.1) είναι άρτια ως προς τις ορμές και οι συχνότητες ω_j , $j=1,2,\dots,N$ δε βρίσκονται σε συντονισμό.

Για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε τη μέγιστη τιμή των διαφόρων πολυωνύμων, τα οποία εμφανίζονται στη θεωρία διαταραχών που περιγράψαμε, ορίζουμε μια νόρμα ως εξής. Έστω $\bar{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N) \in \mathbb{R}^N$ ένα δεδομένο πραγματικό διάνυσμα με θετικές συντεταγμένες. Για κάθε ομογενές πολυώνυμο $f \in \Pi_s$ βαθμού s της μορφής :

$$f(x, y) = \sum_{|m+k|=s} f_{mk} x^m y^k \quad (\Gamma.2.21),$$

ορίζουμε τη νόρμα :

$$\|f\|_R = \sum_{m,k} |f_{mk}| \cdot R^{m+k} \quad (\Gamma.2.22),$$

όπου το R^{m+k} συμβολίζει την έκφραση $R^{m_1+k_1} \cdot R^{m_2+k_2} \cdots R^{m_N+k_N}$. Σημειώνουμε ότι αυτή η νόρμα ορίζεται όταν η συνάρτηση f είναι πραγματική αλλά και όταν είναι μιγαδική. Η

νόρμα ($\Gamma.2.22$) θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση φραγμάτων των διαφόρων αναπτυγμάτων σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\Delta_{\rho R} = \{ (x, y) \in R^N : x_j^2 + y_j^2 \leq \rho^2 R_j^2 , \quad 1 \leq j \leq N \} \quad (\Gamma.2.23),$$

όπου ρ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Σημειώνουμε ότι η περιοχή $\Delta_{\rho R}$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο N δίσκων στα επίπεδα $x_j y_j$ με ακτίνες ρR_j , $j=1,2,\dots,N$. Για κάθε ομογενές πολυώνυμο f τάξης s και για $(x,y) \in \Delta_{\rho R}$ έχουμε :

$$|f(x,y)| \leq \rho^s \cdot \|f\|_R \quad (\Gamma.2.24).$$

Ορίζουμε επίσης την ποσότητα :

$$\Lambda = (\min_j R_j)^{-1} , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.25),$$

η οποία θα μας χρειαστεί στη συνέχεια.

Οι μικροί παρονομαστές που εμφανίζονται στη σχέση ($\Gamma.2.20$) πρέπει να έχουν ένα κάτω φράγμα διοφαντικής μορφής, αφού έχουμε υποθέσει ότι στο σύστημα μας δεν εμφανίζονται συντονισμοί. Θεωρούμε λοιπόν ότι αυτοί οι μικροί παρονομαστές έχουν ως κάτω φράγματα τους όρους μιας μη αύξουσας ακολουθίας $\{\alpha_s\}$, $s \geq 3$, όπου α_s πραγματικοί θετικοί αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση :

$$|\vec{k} \cdot \vec{\omega}| \geq \alpha_s \quad (\Gamma.2.26),$$

για κάθε $\vec{k} \in Z^N$ με $0 < |k| \leq s$.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, κατασκευάζουμε προσεγγιστικά ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r)}$ του συστήματος σε μορφή σειρών μέγιστης τάξης r (Σ χέση $\Gamma.2.4$), λύνοντας επαναληπτικά την εξίσωση ($\Gamma.2.11$). Ο ρυθμός μεταβολής αυτών των ολοκληρωμάτων (Σ χέση $\Gamma.2.5$) δίνεται από τη σχέση :

$$\dot{\Phi}^{(j,r)} = [H, \Phi^{(j,r)}] = \mathcal{R}^{(j,r)} = \sum_{s>r} Q_s^{(j)} , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.27),$$

όπου το ομογενές πολυώνυμο $Q_s^{(j)} \in \Pi_s$ είναι :

$$Q_s^{(j)} = - \sum_{i=1}^{r-2} [H_{s-i}, \Phi_{i+2}^{(j)}] - [H_s, I_j] , \quad s > r \quad (\Gamma.2.28).$$

Μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε τις τιμές των ποσοτήτων $|(\Phi^{(j,r)} - I_j)(x,y)|$ και $|\dot{\Phi}^{(j,r)}(x,y)|$. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Γ.1 : Έστω ένα Χαμιλτονιανό σύστημα της μορφής $H(x,y) = \sum_{s \geq 2} H_s(x,y)$ όπου $H_2(x,y) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j}{2} (x_j^2 + y_j^2)$ και $H_s(x,y) \in \Pi_s$. Υποθέτουμε ότι για ένα δεδομένο πραγματικό διάνυσμα $\bar{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N) \in R^N$ υπάρχουν πραγματικές σταθερές $h \geq 0$ και

$E > 0$ τέτοιες ώστε $\|H_s\|_R \leq h^{s-3}$ Ε για $s \geq 3$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι συχνότητες ω_j δε βρίσκονται σε συντονισμό, ικανοποιώντας μια σχέση της μορφής $|\vec{k} \cdot \vec{\omega}| \geq \alpha_s$, όπου $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in Z^N$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$, $|k| \leq s$ και $\{\alpha_s\}_{s \geq 3}$ μια μη αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Τότε για κάθε ακέραιο $r > 0$ υπάρχουν N προσεγγιστικά ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r)} = I_j + \sum_{s=3}^r \Phi_s^{(j)}$, $1 \leq j \leq N$ όπου $I_j = \frac{1}{2} (x_j^2 + y_j^2)$, τέτοια ώστε η συνάρτηση $\dot{\Phi}^{(j,r)} = [H, \Phi^{(j,r)}]$ να είναι μια σειρά βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με $r+1$. Επιπλέον για κάθε $(x,y) \in \Delta_{pR}$ (Σχέση Γ.2.23) και για $\rho < h^{-1}$ ισχύουν οι σχέσεις :

$$|(\Phi^{(j,r)} - I_j)(x,y)| < \frac{24E}{\alpha_1} \rho^3 \left[1 - (\sigma_r \rho)^{r-2} \right] (1 - \sigma_r \rho)^{-1} \quad (\Gamma.2.29)$$

$$|\dot{\Phi}^{(j,r)}(x,y)| < C_r \rho^{r+1} (1 - h\rho)^{-2} \quad (\Gamma.2.30)$$

όπου :

$$\sigma_3 = 1$$

$$\sigma_r = \left(12 \Lambda^2 E + \frac{8}{9} h \alpha_3 \right) \left[\frac{(r-1)!}{\prod_{l=4}^r \alpha_l} \right]^{\frac{1}{r-3}}, \quad r \geq 3 \quad (\Gamma.2.31).$$

$$C_r = 8 E \left(12 \Lambda^2 E + \frac{8}{9} h \alpha_3 \right)^{r-2} \frac{r!}{\prod_{l=4}^r \alpha_l}, \quad r \geq 3$$

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμήσεις του παραπάνω θεωρήματος (Σχέσεις Γ.2.29, 30 και 31) εξαρτώνται από την τάξη r , μέχρι την οποία υπολογίζουμε τα προσεγγιστικά ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r)}$, $j=1,2,\dots,N$. Βελτιστοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις καταφέρνουμε να άρουμε την εξάρτηση τους από την τάξη r . Αρχικά εισάγουμε μια συγκεκριμένη έκφραση για τους όρους της ακολουθίας α_s , $s \geq 3$ (Σχέση Γ.2.26). Χρησιμοποιούμε τη Διοφαντική σχέση (Γ.2.3), όπου $0 < |k| \leq s$. Επομένως τελικά μπορούμε να θέσουμε :

$$\alpha_s = \gamma s^{-\tau}, \quad s \geq 3 \quad (\Gamma.2.32),$$

όπου γ , τ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\gamma > 0$ και $\tau > N-1$.

Ορίζοντας τη σταθερά :

$$\rho_* = \frac{\gamma}{4} \left(3 \Lambda^2 E + \frac{2\gamma h}{3^{\tau+2}} \right)^{-1} \quad (\Gamma.2.33),$$

η σχέση (Γ.2.30) παίρνει τη μορφή :

$$\left| \dot{\Phi}^{(j,r)}(x,y) \right| < 2^{3-\tau} E \rho^3 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{r-2} (r!)^{\tau+1} (1 - h\rho)^{-2} \quad (\Gamma.2.34).$$

Ορίζουμε ως βέλτιστη τάξη (r_{opt}) την τιμή της τάξης r , για την οποία το δεξιό μέρος της ανισότητας (Γ.2.34) παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Η τάξη αυτή υπολογίζεται παραγωγίζοντας ως προς r την ποσότητα $(\rho/\rho_*)^{r-2} \cdot (r!)^{\tau+1}$ χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling : $n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{n}$. Η βέλτιστη τάξη ισούται με τον ακέραιο r_{opt} που ικανοποιεί τη σχέση :

$$\left(\frac{\rho_*}{\rho} \right)^{\frac{1}{\tau+1}} - 1 < r_{opt} \leq \left(\frac{\rho_*}{\rho} \right)^{\frac{1}{\tau+1}} \quad (\Gamma.2.35).$$

Οι υπολογισμοί μας έχουν νόημα αν $r_{opt} \geq 3$ ή ισοδύναμα όταν :

$$\rho \leq 3^{-(\tau+1)} \cdot \rho_* \quad (\Gamma.2.36).$$

Υπολογίζοντας τα προσεγγιστικά ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r)}$, $j=1,2,\dots,N$ (Σχέση Γ.2.4) μέχρι την τάξη r_{opt} , που ορίζεται από τη σχέση (Γ.2.35), αποδεικνύεται ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Γ.2 : Θεωρούμε ένα Χαμιλτονιανό σύστημα, για το οποίο ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Γ.1. Εστω επίσης ότι οι συγχότητες ω_j , $j=1,2,\dots,N$ ικανοποιούν τη σχέση $|\vec{k} \cdot \vec{\omega}| \geq \gamma |k|^\tau$ όπου $\vec{k} \in Z^N$ και $\gamma > 0$, $\tau > N-1$. Τότε για κάθε $\rho \leq 3^{-(\tau+1)} \cdot \rho_*$, όπου η σταθερά ρ_* ορίζεται από τη σχέση (Γ.2.33), υπάρχουν N προσεγγιστικά ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r_{opt})}$, $1 \leq j \leq N$ τέτοια ώστε για κάθε $(x,y) \in \Delta_{\rho R}$ (Σχέση Γ.2.23) να ισχύουν οι σχέσεις :

$$\left| (\Phi^{(j,r_{opt})} - I_j)(x,y) \right| < \frac{8 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 \cdot \rho_*} \rho^3 \quad (\Gamma.2.37)$$

$$\left| \dot{\Phi}^{(j,r_{opt})}(x,y) \right| < 3 \cdot 2^4 \left(\frac{e^2}{2} \right)^{\tau+1} E \rho_*^3 \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-(\tau+1) \left(\frac{\rho_*}{\rho} \right)^{\frac{1}{\tau+1}} \right] \quad (\Gamma.2.38)$$

Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε την περιοχή του σημείου ευσταθούς ισορροπίας, για την οποία έχουμε πρακτική ευστάθεια. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι τα ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r_{opt})}$, $1 \leq j \leq N$ είναι ακριβή ολοκληρώματα του Χαμιλτονιανού συστήματος (Γ.1.1). Δοθείσης μιας περιοχής $\Delta_{\rho R}$ (Σχέση Γ.2.23) προσπαθούμε να προσδιορίσουμε μια περιοχή $\Delta_{\rho_0 R}$ τέτοια ώστε κάθε τροχιά με αρχική συνθήκη $(x_0, y_0) \in \Delta_{\rho_0 R}$ να παραμένει περιορισμένη στην περιοχή $\Delta_{\rho R}$ για πάντα. Σημειώνουμε εδώ ότι :

$$(x,y) \in \Delta_{\rho R} \Leftrightarrow I_j(x,y) \leq I_{j,max} , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.39),$$

όπου :

$$I_{j,\max} = \frac{1}{2} \rho^2 R_j^2 , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.40).$$

Η χρονική μεταβολή της ποσότητας $I_j(t)$ μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση :

$$|I_j(t) - I_j(0)| \leq |I_j(t) - \Phi^{(j,r_{opt})}(t)| + |\Phi^{(j,r_{opt})}(t) - \Phi^{(j,r_{opt})}(0)| + |\Phi^{(j,r_{opt})}(0) - I_j(0)| , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.41).$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα $\Phi^{(j,r_{opt})}$, $j=1,2,\dots,N$ είναι πραγματικά ολοκληρώματα η παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της (Γ.2.37) μας δίνει :

$$|I_j(t) - I_j(0)| \leq \frac{16 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 \cdot \rho_*} \rho^3 = \frac{32 \cdot 3^\tau \cdot \rho}{\Lambda^2 \cdot R_j^2 \cdot \rho_*} I_{j,\max} \quad (\Gamma.2.42).$$

Επομένως η σχέση $I_j(t) \leq I_{j,\max}$ ισχύει όταν :

$$I_j(0) = \frac{1}{2} \rho_0^2 R_j^2 \leq \left(1 - \frac{32 \cdot 3^\tau \cdot \rho}{\Lambda^2 \cdot R_j^2 \cdot \rho_*}\right) \cdot I_{j,\max} , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.43).$$

Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται όταν ισχύει η συνθήκη :

$$\rho \leq \frac{\rho_*}{32 \cdot 3^\tau} \quad (\Gamma.2.44).$$

η οποία δεν αντιβαίνει στην ασθενέστερη απαίτηση $\rho \leq 3^{-(\tau+1)} \rho_*$ (Σχέση Γ.2.36) που απαιτείται από το θεώρημα Γ.2.

Δυστυχώς η παραπάνω θεώρηση δεν ισχύει για πάντα αφού τα ολοκληρώματα $\Phi^{(j,r_{opt})}$, $j=1,2,\dots,N$ είναι προσεγγιστικά και όχι ακριβή. Σύμφωνα όμως με το θεώρημα Γ.2 οι χρονικές τους παράγωγοι μπορούν να γίνουν αρκετά μικρές (Σχέση Γ.2.38), έτσι ώστε η παραπάνω θεώρηση να ισχύει με μια μικρή τροποποίηση των διαφόρων ορίων της για πεπερασμένα όμως χρονικά διαστήματα. Πράγματι, όταν η χρονική μεταβολή των προσεγγιστικών ολοκληρωμάτων είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την αλλαγή που ορίζεται στη σχέση (Γ.2.42), δηλαδή όταν ισχύει :

$$|\dot{\Phi}^{(j,r_{opt})}(t) - \dot{\Phi}^{(j,r_{opt})}(0)| = \mu \cdot \frac{16 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 \cdot \rho_*} \rho^3 \quad (\Gamma.2.45),$$

όπου $\mu \in R_+^*$, ο χρόνος T για τον οποίο το σύστημα παρουσιάζει πρακτική ευστάθεια ικανοποιεί τη σχέση :

$$|\dot{\Phi}^{(j,r_{opt})}| \cdot T < \mu \cdot \frac{16 \cdot 3^\tau}{\Lambda^2 \cdot \rho_*} \rho^3 \quad (\Gamma.2.46).$$

Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Γ.3 : Εστω το Χαμιλτονιανό σύστημα του θεωρήματος Γ.2 και μ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Εστω επίσης οι σταθερές :

$$\rho_* = \frac{\gamma}{4} \left(3 \Lambda^2 E + \frac{2\gamma h}{3^{\tau+2}} \right)^{-1}$$

$$I_{j,\max} = \frac{1}{2} \rho^2 R_j^2 , \quad j=1,2,\dots,N$$

$$T = \frac{\mu}{9 \cdot \Lambda^2 \cdot E \cdot \rho_*} \left(\frac{6}{e^2} \right)^{\tau+1} \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \exp \left[(\tau+1) \left(\frac{\rho_*}{\rho} \right)^{\frac{1}{\tau+1}} \right] \quad (\Gamma.2.47).$$

Τότε για κάθε $\rho < [32 \cdot 3^\tau \cdot (1+\mu)]^{-1} \cdot \rho_*$ και για κάθε αρχική συνθήκη (x_0, y_0) που ικανοποιεί τη σχέση :

$$I_j(0) = \frac{1}{2} \rho_0^2 R_j^2 \leq \left[1 - \frac{32 \cdot 3^\tau \cdot \rho}{\Lambda^2 \cdot R_j^2 \cdot \rho_*} (1 + \mu) \right] \cdot I_{j,\max} , \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.2.48),$$

έχουμε $I_j(t) < I_{j,\max}$ για $|t| < T$. Από τη σχέση (Γ.2.47) παρατηρούμε ότι ο χρόνος T αυξάνει εκθετικά όσο τα όρια της περιοχής $\Delta_{p,R}$ πλησιάζουν το σημείο ισορροπίας ($\rho \rightarrow 0$). Επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε μια περιοχή, για την οποία ο χρόνος T είναι πολύ μεγάλος, για παράδειγμα ίσος με την ηλικία του σύμπαντος. Τότε οι τροχιές με αρχικές συνθήκες στην περιοχή $\Delta_{p_0,R}$, παραμένουν στην περιοχή $\Delta_{p,R}$ τουλάχιστον για χρόνο ίσο με την ηλικία του σύμπαντος. Μπορούμε επομένως να εγγυηθούμε την πρακτική ευστάθεια των τροχιών της περιοχής $\Delta_{p_0,R}$. Το αν το μέγεθος της περιοχής αυτής έχει κάποιο πρακτικό νόημα, δεν είναι δηλαδή αμελητέο, είναι ένα άλλο ζήτημα, το οποίο εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύστημα που μελετάμε. Σημειώνουμε ότι στην εφαρμογή των ιδεών του Nekhoroshev στο επίπεδο πρόβλημα των τριών σωμάτων που ακολουθεί, η περιοχή πρακτικής ευστάθειας έχει ρεαλιστικό μέγεθος και πρακτικό φυσικό νόημα.

Γ.3. Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μορφή της Χαμιλτονιανής συνάρτησης του επιπέδου περιορισμένου προβλήματος των τριών σωμάτων. Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στην περίπτωση του συστήματος Ήλιου - Δία - αστεροειδή. Τελικά μετά την εφαρμογή μιας σειράς κανονικών μετασχηματισμών θα εκφράσουμε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας L_4 σε μορφή δυναμοσειράς (Σχέση Γ.1.1).

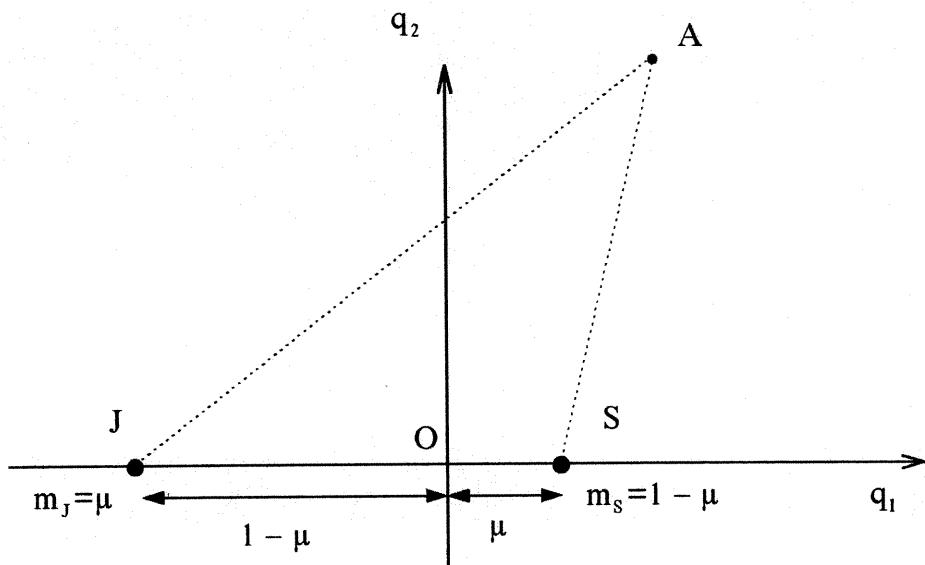
Αρχικά θεωρούμε ένα ομαλά περιστρεφόμενο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, q_1, q_2) με αρχή O το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιου (S) και Δία (J) (Σχήμα Γ.1). Το σύστημα αυτό επιλέγεται έτσι ώστε ο Ήλιος να βρίσκεται συνεχώς στο σημείο $(\mu, 0)$ και ο Δίας στο σημείο $(-\mu, 0)$. Σημειώνουμε ότι οι φυσικές μονάδες που χρησιμοποιούμε επιλέχθηκαν έτσι ώστε η μάζα του Δία να είναι $\mu = 9,5387536 \times 10^{-4}$, η μάζα του Ήλιου $1 - \mu$, η απόσταση μεταξύ του Ήλιου και του Δία ίση με 1 και η γωνιακή ταχύτητα του Δία ίση με 1. Επομένως η μονάδα χρόνου ισούται με $(2\pi)^{-1} \cdot T_J$, όπου T_J η περίοδος περιφοράς του Δία, ενώ η μονάδα μάζας ισούται με το άθροισμα των πραγματικών μαζών του Ήλιου και

του Δία. Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος σ' αυτό το σύστημα συντεταγμένων δίνεται από τη σχέση (Szebehely 1967) :

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(q_1 - \mu)^2 + q_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(q_1 + 1 - \mu)^2 + q_2^2}} \quad (\Gamma.3.1),$$

όπου p_1, p_2 οι συζυγείς ορμές των γενικευμένων θέσεων q_1, q_2 . Οι συντεταγμένες του σημείου L_4 είναι :

$$q_1 = \mu - \frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_1 = -q_2, \quad p_2 = q_1.$$



Σχήμα Γ.1 : Το σύστημα Ήλιος (S) - Δία (J) - αστεροειδή (A) ως προς ένα ομαλά περιστρεφόμενο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, q_1 , q_2) με αρχή Ο το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιος - Δία. Η μάζα του Δία είναι μ και του Ήλιου $1-\mu$.

Στη συνέχεια ορίζουμε ένα περιστρεφόμενο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η αρχή του οποίου βρίσκεται στον Ήλιο. Το ηλιοκεντρικό αυτό σύστημα εισάγεται μέσω ενός κανονικού μετασχηματισμού, η γεννήτρια συνάρτηση του οποίου είναι :

$$W_3 = -(Q_1 + \mu)p_1 - Q_2 p_2 - \mu Q_2 \quad (\Gamma.3.2),$$

όπου με Q_1, Q_2, P_1, P_2 συμβολίζονται οι νέες γενικευμένες θέσεις και ορμές. Σύμφωνα με τη θεωρία των κανονικών μετασχηματισμών (Goldstein 1980) οι νέες και οι παλιές γενικευμένες μεταβλητές συνδέονται μέσω των σχέσεων :

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\partial W_3}{\partial p_1} \Rightarrow q_1 = Q_1 + \mu, \quad P_1 = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_1} \Rightarrow p_1 = P_1 \\ q_2 &= -\frac{\partial W_3}{\partial p_2} \Rightarrow q_2 = Q_2, \quad P_2 = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_2} \Rightarrow p_2 = P_2 + \mu \end{aligned} \quad (\Gamma.3.3),$$

ενώ η Χαμιλτονιανή ως προς τις ηλιοκεντρικές συντεταγμένες έχει τη μορφή :

$$H = \frac{1}{2} [P_1^2 + P_2^2] + Q_2 P_1 - Q_1 P_2 - \mu Q_1 - \frac{1-\mu}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(Q_1+1)^2 + Q_2^2}} - \frac{\mu^2}{2} \quad (\Gamma.3.4).$$

Παραλείπουμε το σταθερό όρο $\frac{\mu^2}{2}$ και εισάγουμε πολικές συντεταγμένες ρ, θ στο ηλιοκεντρικό καρτεσιανό σύστημα, μέσω του κανονικού μετασχηματισμού που ορίζεται από τη γεννήτρια συνάρτηση :

$$W'_3 = -\rho(P_1 \cdot \cos\theta + P_2 \cdot \sin\theta) \quad (\Gamma.3.5).$$

Οι νέες γενικευμένες ορμές συμβολίζονται ως p_ρ και p_θ . Οι νέες γενικευμένες μεταβλητές $\rho, \theta, p_\rho, p_\theta$, συνδέονται με τις παλιές Q_1, Q_2, P_1, P_2 , μέσω εξισώσεων, αναλόγων αυτών που σημειώνονται στις σχέσεις ($\Gamma.3.3$), οι οποίες τελικά μας δίνουν :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \rho \cdot \cos\theta, \quad P_1 = p_\rho \cdot \cos\theta - \frac{p_\theta}{\rho} \cdot \sin\theta \\ Q_2 &= \rho \cdot \sin\theta, \quad P_2 = p_\rho \cdot \sin\theta + \frac{p_\theta}{\rho} \cdot \cos\theta \end{aligned} \quad (\Gamma.3.6).$$

Η Χαμιλτονιανή μετά τον παραπάνω μετασχηματισμό παίρνει τη μορφή :

$$H = \frac{1}{2} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} \right] - p_\theta - \mu \cdot \rho \cdot \cos\theta - \frac{1-\mu}{\rho} - \frac{\mu}{\sqrt{\rho^2 + 1 + 2\rho \cdot \cos\theta}} \quad (\Gamma.3.7),$$

ενώ οι συντεταγμένες του σημείου L_4 είναι :

$$\rho = 1, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}, \quad p_\rho = 0, \quad p_\theta = 1.$$

Εισάγουμε στη συνέχεια ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή του σημείου L_4 μέσω του κανονικού μετασχηματισμού που ορίζεται από τη γεννήτρια συνάρτηση :

$$W_2 = p_x(\rho - 1) + (p_y + 1)\theta - \frac{2\pi}{3}p_y \quad (\Gamma.3.8),$$

όπου x, y οι νέες γενικευμένες θέσεις και p_x, p_y , οι αντίστοιχες γενικευμένες ορμές. Οι σχέσεις που συνδέουν τις παλιές με τις νέες γενικευμένες συντεταγμένες είναι :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial W_2}{\partial p_x} \Rightarrow \rho = x + 1 \quad , \quad p_\rho = \frac{\partial W_2}{\partial \rho} \Rightarrow p_\rho = p_x \\ y &= \frac{\partial W_2}{\partial p_y} \Rightarrow \theta = y + \frac{2\pi}{3} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \Rightarrow p_\theta = p_y + 1 \end{aligned} \quad (\Gamma.3.9),$$

ενώ η Χαμιλτονιανή δίνεται από τη σχέση :

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[p_x^2 + \frac{(p_y + 1)^2}{(x + 1)^2} \right] - p_y - \mu(x + 1) \cdot \cos \left(y + \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1 - \mu}{x + 1} - \\ - \frac{\mu}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1 + 2(x + 1) \cdot \cos \left(y + \frac{2\pi}{3} \right)}} - 1 \end{array} \right\} \quad (\Gamma.3.10).$$

Η επιλογή του μετασχηματισμού που εισήγαγε η γεννήτρια συνάρτηση (Γ.3.8) έγινε έτσι ώστε οι συντεταγμένες του σημείου L_4 στις νέες μεταβλητές να είναι:

$$x = 0, y = 0, p_x = 0, p_y = 0 \quad (\Gamma.3.11).$$

Παραλείποντας το σταθερό όρο -1 και κάνοντας ανάπτυξη σε σειρά Taylor της Χαμιλτονιανής (Γ.3.10) γύρω από το σημείο (Γ.3.11) έχουμε :

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (\Gamma.3.12).$$

όπου :

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - 2xp_y + \left(\frac{1}{2} + \frac{9\mu}{8} \right) x^2 - \frac{9\mu}{8} y^2 + \frac{3\sqrt{3}\mu}{4} xy \quad (\Gamma.3.13),$$

και H_s για $s > 2$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού s ως προς τις μεταβλητές x, y, p_x, p_y .

Σημειώνουμε ότι ο σταθερός όρος $H_0 = \frac{\mu-1}{2}$, που προκύπτει από την ανάπτυξη σε σειρά

Taylor παραλείπεται, αφού δεν επηρεάζει τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος, ενώ επιπροσθέτως δεν εμφανίζονται καθόλου όροι πρώτης τάξης. Στην πραγματικότητα η ανάπτυξη σε σειρά Taylor της συνάρτησης (Γ.3.10) μέχρι μια δεδομένη τάξη $s > 2$ γίνεται με τη χρήση ειδικού προγράμματος στον υπολογιστή.

Το επόμενο βήμα είναι η εισαγωγή ενός ακόμα μετασχηματισμού, τέτοιου ώστε ο όρος H_2 να έχει στις νέες μεταβλητές x_1, x_2, y_1, y_2 , διαγώνια μορφή (Σχέση Γ.1.2), δηλαδή:

$$H_2 = \frac{\omega_1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2} (x_2^2 + y_2^2) \quad (\Gamma.3.14).$$

Για την εύρεση αυτού του μετασχηματισμού ακολουθούμε τη μεθοδολογία που περιγράφεται στις εργασίες των Giorgilli et al. (1989) και Celletti & Giorgilli (1991).

Έστω λοιπόν \underline{U} ο Hessian πίνακας του όρου H_2 (Σχέση Γ.3.13), τα στοιχεία U_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$, του οποίου, δίνονται από τη σχέση :

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z_i \partial z_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (\Gamma.3.15),$$

όπου $z_1=x$, $z_2=y$, $z_3=p_x$ και $z_4=p_y$. Επομένως έχουμε :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{9\mu}{4} & \frac{3\sqrt{3}\mu}{4} & 0 & -2 \\ \frac{3\sqrt{3}\mu}{4} & -\frac{9\mu}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.3.16).$$

Συμβολίζοντας με $\lambda = i\omega$ τις ιδιοτιμές του πίνακα $\underline{J} \cdot \underline{U}$ (όπου \underline{J} ο συνήθης συμπλεκτικός πίνακας 4×4 (Σχέση A.1.16)) η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $\underline{J} \cdot \underline{U}$ παίρνει τη μορφή :

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{16} - a^2 = 0 \quad (\Gamma.3.17),$$

όπου a η σταθερά :

$$a = -\frac{(1 - 2\mu)3\sqrt{3}}{4} \quad (\Gamma.3.18).$$

Επειδή $27\mu(1-\mu) < 1$ (αφού $\mu = 9,5387536 \times 10^{-4}$) η εξίσωση (Γ.3.17) έχει δύο θετικές λύσεις :

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{27}{4} + 4a^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{27}{4} + 4a^2} \quad (\Gamma.3.19),$$

όπου $\omega_1^2 > \frac{1}{2}$ και $\omega_2^2 < \frac{1}{2}$.

Το ιδιοδιάνυσμα \underline{b}_j που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή $i\omega_j$, $j=1,2$ δίνεται ως πίνακας στήλη, από τη σχέση :

$$\underline{b}_j = \underline{e}_j + i \cdot \underline{f}_j = \begin{cases} \frac{8\omega_j^2 + 4\sqrt{3}a + 9}{8} \\ \frac{16i\cdot\omega_j + 4a + 3\sqrt{3}}{8} \\ i\cdot\omega_j \left(\frac{8\omega_j^2 + 4\sqrt{3}a + 9}{8} \right) \\ i\cdot\omega_j \left(\frac{4a + 3\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{4\sqrt{3}a + 9}{4} \end{cases}, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.3.20),$$

όπου \underline{e}_j , \underline{f}_j , $j=1,2$ πραγματικοί πίνακες στήλη.

Εύκολα υπολογίζουμε ότι :

$$\underline{e}_j^T \cdot \underline{J} \cdot \underline{f}_j = m_j = \omega_j D_j , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.3.21),$$

όπου :

$$D_j = \left(\frac{8\omega_j^2 + 4\sqrt{3}a + 9}{8} \right)^2 - 2 \left(\sqrt{3}a + \frac{9}{4} \right) + \left(\frac{4a + 3\sqrt{3}}{8} \right)^2 , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.3.22).$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές των ποσοτήτων a (Σχέση Γ.3.18) και ω_1 , ω_2 (Σχέση Γ.3.19) παίρνουμε $D_1 > 0$ και $D_2 < 0$.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός, σύμφωνα με τον οποίο ο όρος H_2 παίρνει τη μορφή (Γ.3.14), ορίζεται από τη σχέση :

$$(x \ y \ p_x \ p_y)^T = \underline{C} \cdot (x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2)^T \quad (\Gamma.3.23),$$

όπου :

$$\underline{C} = (e_1 \cdot m_1^{-\frac{1}{2}} \ e_2 \cdot m_2^{-\frac{1}{2}} \ f_1 \cdot m_1^{-\frac{1}{2}} \ f_2 \cdot m_2^{-\frac{1}{2}}) \quad (\Gamma.3.24).$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας \underline{C} είναι συμπλεκτικός. Τονίζουμε ότι για να είναι πραγματικός ο πίνακας \underline{C} πρέπει :

$$\omega_1 > 0 \text{ και } \omega_2 < 0 \quad (\Gamma.3.25),$$

αφού $D_1 > 0$ και $D_2 < 0$

Τελικά μετά από όλους τους μετασχηματισμούς που περιγράφαμε παραπάνω, η Χαμιλτονιανή του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας L_4 έχει τη μορφή δυναμοσειράς (Σχέση Γ.1.1) :

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{s \geq 2} H_s(x_1, x_2, y_1, y_2) \quad (\Gamma.3.26),$$

όπου ο όρος δεύτερης τάξης δίνεται από μια σχέση της μορφής (Γ.1.2) :

$$H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\omega_1}{2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{\omega_2}{2} (x_2^2 + y_2^2) \quad (\Gamma.3.27).$$

Σημειώνουμε ότι όλες οι παραπάνω αλλαγές μεταβλητών γίνονται στον υπολογιστή με τη βοήθεια κατάλληλου προγράμματος.

Γ.4. Κατασκευή της κανονικής μορφής της Χαμιλτονιανής.

Στην παράγραφο Γ.2 παρουσιάσαμε τα βασικά στοιχεία της θεωρίας του Nekhoroshev, αλλά ταυτόχρονα εξετάσαμε και το πρόβλημα της τυπικής ολοκληρωσιμότητας ενός Χαμιλτονιανού συστήματος της μορφής (Γ.1.1). Συγκεκριμένα αναπτύξαμε μια από τις μεθόδους με τις οποίες αντιμετωπίζεται αυτό το πρόβλημα : την κατασκευή τυπικών ολοκληρωμάτων του συστήματος. Σ' αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε μια άλλη μέθοδο, η οποία έγκειται στην εύρεση ενός κανονικού μετασχηματισμού, με τη βοήθεια του οποίου η Χαμιλτονιανή του συστήματος αποκτά κανονική μορφή (normal form). Αυτή τη μεθοδολογία θα την εφαρμόσουμε στη Χαμιλτονιανή του συστήματος Ήλιου - Δία - αστεροειδή που μελετάμε.

Η διαδικασία εύρεσης της κανονικής μορφής της Χαμιλτονιανής συνάρτησης (Γ.3.26) περιγράφεται αναλυτικά από τους Giorgilli et al. (1989). Εμείς θα περιγράψουμε τα βασικά στοιχεία αυτής της διαδικασίας. Το πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι η εύρεση μιας γεννήτριας συνάρτησης σε μορφή δυναμοσειράς :

$$X = X_3 + X_4 + X_5 + \dots \quad (\Gamma.4.1),$$

όπου X_s ομογενή πολυώνυμα βαθμού s , έτσι ώστε ο κανονικός μετασχηματισμός που ορίζει να φέρνει τη Χαμιλτονιανή (Γ.3.26) σε κανονική μορφή :

$$Z = Z_2 + Z_3 + Z_4 + \dots \quad (\Gamma.4.2),$$

όπου Z_s ομογενή πολυώνυμα βαθμού s . Οι μεταβλητές, ως προς τις οποίες εκφράζεται η κανονική μορφή Z ονομάζονται κανονικές και συμβολίζονται με x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 . Η κανονική μορφή Z της Χαμιλτονιανής είναι συνάρτηση μόνο των ποσοτήτων :

$$I'_j = \frac{1}{2} (x'_j{}^2 + y'_j{}^2), \quad j=1,2,\dots,N \quad (\Gamma.4.3),$$

οι οποίες αποτελούν ακριβή ολοκληρώματα του συστήματος (Γ.4.2).

Η σχέση των συναρτήσεων H, Z και X καθορίζεται από την εξίσωση :

$$T_X Z = H \quad (\Gamma.4.4),$$

όπου T_X ένας τελεστής τον οποίο ορίζουμε στη συνέχεια. Η λύση αυτής της εξίσωσης μας καθορίζει τη μορφή των αγνώστων συναρτήσεων X και Z .

Έστω Π_s το σύνολο των ομογενών πολυωνύμων βαθμού s , δηλαδή $f_s \in \Pi_s$ όταν $f_s(x,y) = \sum_{|m+k|=s} f_{mk} \cdot x^m y^k$ (Σχέση Γ.2.16) και L_g ο τελεστής :

$$L_g : \Pi_k \rightarrow \Pi_{k+m-2} \text{ με } L_g h = [g, h] \quad (\Gamma.4.4),$$

όπου $g \in \Pi_m$ και $h \in \Pi_k$. Επομένως ο τελεστής L_{H_2} (Σχέση Γ.2.8) είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου τελεστή.

Η δράση του τελεστή T_X ορίζεται ως εξής. Έστω μια συνάρτηση $f = \sum_{s \geq 1} f_s$ με $f_s \in \Pi_s$. Τότε έχουμε :

$$T_X f = \sum_{s \geq 1} F_s \quad (\Gamma.4.6),$$

όπου :

$$F_s = \sum_{m=1}^s f_{m,s-m} \quad (\Gamma.4.7),$$

και

$$f_{m,0} = f_m, \quad f_{m,k} = - \sum_{n=1}^k \frac{n}{k} \cdot L_{X_{2+n}} f_{m,k-n} \quad (\Gamma.4.8).$$

Φαίνεται εύκολα ότι $f_{m,k} \in \Pi_{m+k}$, οπότε $F_s \in \Pi_s$. Αποδεικνύεται επίσης ότι ο μετασχηματισμός που ορίζει η γεννήτρια συνάρτηση X είναι κανονικός και ότι ο τελεστής T_X είναι γραμμικός, αντιστρέψιμος και διατηρεί τα γινόμενα και τις αγκύλες Poisson, δηλαδή $T_X(f \cdot g) = T_X f \cdot T_X g$, $T_X[f, g] = [T_X f, T_X g]$ (Giorgilli & Galgani 1978).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τελεστή T_X η εξίσωση (Γ.4.4) αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη με το σύστημα εξισώσεων :

$$Z_2 = H_2 \quad (\Gamma.4.9),$$

$$- L_{H_2} X_s + Z_s = F'_s, \quad s \geq 3 \quad (\Gamma.4.10),$$

όπου :

$$F'_3 = H_3$$

$$F'_s = - \sum_{m=1}^{s-3} \frac{m}{s-2} \cdot L_{X_{2+m}} Z_{s-m} + \sum_{m=1}^{s-2} \frac{m}{s-2} H_{2+m, s-m-2} \quad s \geq 4 \quad (\Gamma.4.11).$$

Για να λύσουμε την εξίσωση (Γ.4.10) γράφουμε τη Χαμιλτονιανή (Γ.3.26) συναρτήσει των μιγαδικών μεταβλητών q_1, q_2, p_1, p_2 , οι οποίες ορίζονται μέσω του κανονικού μετασχηματισμού :

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_j + i p_j), \quad y_j = \frac{i}{\sqrt{2}} (q_j - i p_j), \quad j=1,2 \quad (\Gamma.4.12).$$

Σημειώνουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο ίδιος με το μετασχηματισμό (Γ.2.13) που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε την εξίσωση (Γ.2.11), μέσω της οποίας υπολογίζουμε τα τυπικά ολοκληρώματα του συστήματος. Στις μιγαδικές μεταβλητές q, p ο όρος δεύτερης τάξης της Χαμιλτονιανής (Σχέση Γ.3.27) δίνεται από τη σχέση :

$$H_2 = i \omega_1 p_1 q_1 + i \omega_2 p_2 q_2 \quad (\Gamma.4.13),$$

ενώ ο τελεστής L_{H_2} παίρνει τη μορφή :

$$L_{H_2} = i \sum_{j=1}^2 \omega_j \left(p_j \frac{\partial}{\partial p_j} - q_j \frac{\partial}{\partial q_j} \right) \quad (\Gamma.4.14),$$

οπότε σύμφωνα με τη σχέση (Γ.2.15) έχουμε :

$$L_{H_2} q^m p^k = i [(\vec{k} - \vec{m}) \cdot \vec{\omega}] q^m p^k \quad (\Gamma.4.15).$$

Σε αναλογία με τη μέθοδο επίλυσης της εξίσωσης (Γ.2.11) ορίζουμε την εικόνα R_s του συνόλου Π_s , μέσω του τελεστή L_{H_2} :

$$R_s = \{ c_{m_1 m_2 k_1 k_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \in \Pi_s, c_{m_1 m_2 k_1 k_2} \in C : \omega_1(k_1 - m_1) + \omega_2(k_2 - m_2) \neq 0 \} \quad (\Gamma.4.16),$$

και τον πυρήνα N_s του τελεστή L_{H_2} :

$$N_s = \{ c_{m_1 m_2 k_1 k_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \in \Pi_s, c_{m_1 m_2 k_1 k_2} \in C : \omega_1(k_1 - m_1) + \omega_2(k_2 - m_2) = 0 \} \quad (\Gamma.4.17),$$

οπότε έχουμε :

$$N_s \oplus R_s = \Pi_s \quad (\Gamma.4.18).$$

Θεωρώντας ότι οι συχνότητες ω_1, ω_2 , δε βρίσκονται σε συντονισμό, δηλαδή δεν υπάρχουν ακέραιοι m, n ώστε $m\omega_1 + n\omega_2 = 0$, έχουμε :

$$N_s = \{ c_{m_1 m_2 m_1 m_2} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \in \Pi_s, c_{m_1 m_2 m_1 m_2} \in C \} \quad (\Gamma.4.19).$$

Για κάθε συνάρτηση $f \in \Pi_s$ έχουμε :

$$f = f_R + f_N \quad (\Gamma.4.20),$$

με $f_R \in R_s$ και $f_N \in N_s$.

Εστω επίσης P_{R_s} και P_{N_s} οι τελεστές προβολής πάνω στους χώρους R_s και N_s αντίστοιχα :

$$P_{R_s} f = f_R, \quad P_{N_s} f = f_N \quad (\Gamma.4.21).$$

Οι όροι Z_s της κανονικής μορφής ανήκουν στο σύνολο N_s αφού όπως έχουμε αναφέρει είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων (Γ.4.3), η μορφή των οποίων στις μιγαδικές μεταβλητές είναι :

$$I'_j = i p_j q_j \in N_s, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.4.22).$$

Επομένως οι συναρτήσεις X και Z προσδιορίζονται σύμφωνα με την εξίσωση (Γ.4.10) από τις σχέσεις :

$$Z_s = P_{N_s} F'_s \quad s \geq 3 \quad (\Gamma.4.23),$$

και

$$-L_{H_2} X_s = P_{R_s} F'_s = \sum_{mk} f'_{mk} \cdot q^m p^k \Rightarrow \\ X_s = i \sum_{|m+k|=s} \frac{f'_{m_1 m_2 k_1 k_2}}{\omega_1(k_1 - m_1) + \omega_2(k_2 - m_2)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \quad s \geq 3 \quad (\Gamma.4.24),$$

όπου $f'_{m_1 m_2 k_1 k_2} \in C$. Η γεννήτρια συνάρτηση X ορίζεται γενικά με την αυθαιρεσία ενός τυχαίου όρου $\tilde{X} \in N_s$. Η λύση (Γ.4.24) είναι μοναδική αν απαιτήσουμε επιπλέον $X_s \in R_s$, δηλαδή $\tilde{X} = 0$.

Τέλος εκτελώντας τον αντίστροφο κανονικό μετασχηματισμό (Γ.4.12) εκφράζουμε τη συνάρτηση Z στις κανονικές μεταβλητές x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 .

Η διαδικασία που περιγράψαμε αποτελεί την κλασσική μέθοδο λύσης του προβλήματος όπως αναφέρεται από τους Birkhoff (1927) και Gustavson (1966). Ο πλήρης αλγόριθμος καθώς και το υπολογιστικό πρόγραμμα, το οποίο λύνει την εξίσωση (Γ.4.10) περιγράφονται λεπτομερώς από τον Giorgilli (1979).

Γ.5. Εύρεση της περιοχής πρακτικής ευστάθειας.

Ο υπολογισμός των όρων όλων των τάξεων των συναρτήσεων H, Z και X είναι πρακτικά αδύνατος. Γι αυτό αναπτύσσουμε τις διάφορες συναρτήσεις μέχρι κάποια τάξη r . Έτσι έχοντας το ανάπτυγμα της Χαμιλτονιανής H (Σχέση Γ.3.26) τουλάχιστον μέχρι την τάξη $r+1$ υπολογίζουμε σύμφωνα με τις σχέσεις (Γ.4.11, 23 και 24) τις συναρτήσεις Z και X μέχρι και την τάξη r . Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση :

$$X^{(r)} = X_3 + X_4 + \dots + X_r \quad (\Gamma.5.1),$$

κατασκευάζουμε τον κανονικό μετασχηματισμό :

$$x' = T_{X^{(r)}} x, \quad y' = T_{X^{(r)}} y \quad (\Gamma.5.2),$$

όπου x', y' οι κανονικές μεταβλητές του συστήματος. Η μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή $Z^{(r)}$ βρίσκεται σε κανονική μορφή μέχρι τάξη r (υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής $T_{X^{(r)}}$ είναι αντιστρέψιμος), οπότε έχουμε :

$$Z^{(r)}(x', y') = T_{X^{(r)}}^{-1} H = Z_2 + Z_3 + \dots + Z_r + Y^{(r)} \quad (\Gamma.5.3),$$

όπου $Y^{(r)}$ είναι το υπόλοιπο μέρος της συνάρτησης $Z^{(r)}$, το οποίο δε βρίσκεται σε κανονική μορφή. Το υπόλοιπο $Y^{(r)}$ είναι μια δυναμοσειρά, η οποία αρχίζει με όρους τάξης $r+1$.

Οι ποσότητες

$$I'_j(x', y') = \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.4),$$

είναι ακριβή ολοκληρώματα για το τμήμα της συνάρτησης $Z^{(r)}$ που βρίσκεται σε κανονική μορφή, οπότε έχουμε :

$$[I'_j , Z_2 + Z_3 + \dots + Z_r] = 0 , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.5).$$

Αντιθέτως αποτελούν προσεγγιστικά ολοκληρώματα της ολικής Χαμιλτονιανής $Z^{(r)}$ λόγω της ύπαρξης του υπολοίπου $Y^{(r)}$. Για τον ίδιο λόγο οι συναρτήσεις I'_1 , I'_2 εκφρασμένες στις παλιές μεταβλητές x_1, x_2, y_1, y_2 αποτελούν προσεγγιστικά ολοκληρώματα της Χαμιλτονιανής (Γ.3.26). Αυτή η παρατήρηση αποτελεί και τη βάση για τον υπολογισμό του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας. Η χρονική μεταβολή των ποσοτήτων I'_j , $j=1,2$, δίνεται από τη σχέση :

$$\dot{I}'_j = [I'_j , Z^{(r)}] \stackrel{(\Gamma.5.5)}{=} [I'_j , Y^{(r)}] , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.6),$$

οπότε η ποσότητα \dot{I}'_j , $j=1,2$, είναι μια δυναμοσειρά, οι όροι της οποίας αρχίζουν από την τάξη $r+1$.

Θα ορίσουμε στη συνέχεια τις περιοχές τις οποίες θα εξετάσουμε αν έχουμε πρακτική ευστάθεια καθώς και μια νόρμα με τη βοήθεια της οποίας θα εκτιμήσουμε τα άνω φράγματα διαφόρων συναρτήσεων. Η νόρμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι λίγο διαφορετική από αυτήν την οποία ορίσαμε στην παράγραφο Γ.2. Η νέα μορφή της νόρμας είναι ένας από τους παράγοντες που μας επέτρεψαν τη βελτίωση, σε σχέση με προγενέστερες εργασίες, των εκτιμήσεων του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας. Σημειώνουμε ότι οι περιοχές και οι νόρμες που αναφέρονται στη συνέχεια μπορούν να οριστούν είτε στις αρχικές μεταβλητές x, y , είτε στις κανονικές x', y' . Για λόγους απλότητας, στον ορισμό της νόρμας που ακολουθεί χρησιμοποιούμε τα σύμβολα x και y .

Σε αναλογία με όσα αναφέραμε στην παράγραφο Γ.2 θεωρούμε την οικογένεια των περιοχών :

$$\Delta_{\rho R} = \{ (x, y) \in R^4 : x_j^2 + y_j^2 \leq \rho^2 R_j^2 , \quad j=1,2 \} \quad (\Gamma.5.7),$$

όπου R_1, R_2 θετικές πραγματικές σταθερές και ρ μια θετική πραγματική παράμετρος.

Έστω τώρα $f(x,y)$ ένα ομογενές πολυώνυμο τάξης $s \geq 3$, ($f(x,y) \in \Pi_s$) της μορφής :

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{\substack{j_1, j_2, k_1, k_2 \\ j_1 + j_2 + k_1 + k_2 = s}} A_{j_1, j_2, k_1, k_2} \cdot x_1^{j_1} x_2^{j_2} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \quad (\Gamma.5.8),$$

με $A_{j_1, j_2, k_1, k_2} \in R$ και $j_1, j_2, k_1, k_2 \in N$. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι πως θα εκτιμήσουμε τη μέγιστη απόλυτη τιμή της συνάρτησης f στην περιοχή $\Delta_{\rho R}$ για δεδομένα ρ και R . Συγκεκριμένα προσπαθούμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα :

$$|f|_{\rho R} = \sup_{(x,y) \in \Delta_{\rho R}} |f(x,y)| \quad (\Gamma.5.9),$$

δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) της $|f|$ στην περιοχή $\Delta_{\rho R}$. Για να εκτιμήσουμε την ποσότητα (Γ.5.9) εισάγουμε πολικές συντεταγμένες r_j, θ_j , $j=1,2$, αφού η προβολή της περιοχής $\Delta_{\rho R}$ σε κάθε επίπεδο $x_j y_j$, $j=1,2$ είναι ένας κυκλικός δίσκος. Έτσι έχουμε :

$$x_j = r_j \cdot \cos \theta_j, \quad y_j = r_j \cdot \sin \theta_j, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.10),$$

όπου :

$$0 \leq r_j \leq \rho R_j, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.11).$$

Πρακτικά συμφέρει η εισαγωγή των μιγαδικών μεταβλητών ξ_j, η_j , $j=1,2$, μέσω του μετασχηματισμού :

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_j + i \eta_j), \quad y_j = \frac{i}{\sqrt{2}} (\xi_j - i \eta_j), \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.12),$$

οπότε λόγω των σχέσεων (Γ.5.10) έχουμε :

$$\xi_j = \frac{r_j}{\sqrt{2}} e^{-i\theta_j}, \quad \eta_j = -i \frac{r_j}{\sqrt{2}} e^{i\theta_j}, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.13).$$

Η συνάρτηση (Γ.5.8) μέσω των σχέσεων (Γ.5.12) μετασχηματίζεται, όπως θα δούμε στη συνέχεια, σε ένα ομογενές μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού s της μορφής :

$$f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \sum_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = s}} C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \cdot \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \quad (\Gamma.5.14),$$

με $C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \in C$ και $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in N$.

Αρχικά σημειώνουμε ότι πολλαπλασιάζοντας δύο ομογενή πολυώνυμα με μεταβλητές α, β τάξεως l και k καταλήγουμε σ' ένα ομογενές πολυώνυμο τάξης l+k. Συγκεκριμένα έχουμε :

$$\sum_{j=0}^l c_{j,l-j} \alpha^j \beta^{l-j} \cdot \sum_{i=0}^k d_{i,k-i} \alpha^i \beta^{k-i} = \sum_{m=0}^{l+k} b_{m,l+k-m} \alpha^m \beta^{l+k-m} \quad (\Gamma.5.15),$$

όπου c, d και b οι συντελεστές των διαφόρων όρων των πολυωνύμων. Θεωρώντας ότι $c_{0,0} = d_{0,0} = 1$ οι συντελεστές $b_{m,l+k-m}$ προσδιορίζονται από τη σχέση :

$$b_{m,l+k-m} = \sum_{i=\max(m-k,0)}^{\min(l,m)} c_{i,l-i} \cdot d_{m-i,k-m+i} \quad (\Gamma.5.16).$$

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τη σχέση που συνδέει τους συντελεστές $A_{j_1 j_2 k_1 k_2}$ και $C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}$ των δυναμοσειρών (Γ.5.8) και (Γ.5.14) αντίστοιχα.

Ένας συγκεκριμένος όρος του πολυωνύμου (Γ.5.8) μέσω του μετασχηματισμού (Γ.5.12) παίρνει τη μορφή :

$$\begin{aligned}
 & A_{j_1 j_2 k_1 k_2} \cdot x_1^{j_1} x_2^{j_2} y_1^{k_1} y_2^{k_2} = \\
 & = A_{j_1 j_2 k_1 k_2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{j_1} (\xi_1 + i \eta_1)^{j_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{j_2} (\xi_2 + i \eta_2)^{j_2} \cdot \\
 & \cdot \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{k_1} (\xi_1 - i \eta_1)^{k_1} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{k_2} (\xi_2 - i \eta_2)^{k_2} = \\
 & = \frac{A_{j_1 j_2 k_1 k_2}}{2^{\frac{s}{2}}} \cdot i^{k_1+k_2} \cdot \left[\sum_{m_1=0}^{j_1} i^{j_1-m_1} \binom{j_1}{m_1} \xi_1^{m_1} \eta_1^{j_1-m_1} \right] \cdot \left[\sum_{n_1=0}^{k_1} (-i)^{k_1-n_1} \binom{k_1}{n_1} \xi_1^{n_1} \eta_1^{k_1-n_1} \right] \cdot \\
 & \cdot \left[\sum_{m_2=0}^{j_2} i^{j_2-m_2} \binom{j_2}{m_2} \xi_2^{m_2} \eta_2^{j_2-m_2} \right] \cdot \left[\sum_{n_2=0}^{k_2} (-i)^{k_2-n_2} \binom{k_2}{n_2} \xi_2^{n_2} \eta_2^{k_2-n_2} \right] \stackrel{(Γ.5.16)}{=} \\
 & = \frac{A_{j_1 j_2 k_1 k_2}}{2^{\frac{s}{2}}} \cdot i^{k_1+k_2} \cdot \sum_{l_1=0}^{j_1+k_1} \sum_{l_2=0}^{j_2+k_2} \left\{ \left[\sum_{i=\max(l_1-k_1, 0)}^{\min(l_1, j_1)} i^{j_1-i} \binom{j_1}{i} (-i)^{k_1-l_1+i} \binom{k_1}{l_1-i} \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \left[\sum_{i=\max(l_2-k_2, 0)}^{\min(l_2, j_2)} i^{j_2-i} \binom{j_2}{i} (-i)^{k_2-l_2+i} \binom{k_2}{l_2-i} \right] \cdot \xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} \eta_1^{j_1+k_1-l_1} \eta_2^{j_2+k_2-l_2} \right\} \stackrel{(Γ.5.17)}{=}
 \end{aligned}$$

όπου :

$$\binom{k}{m} = \begin{cases} 0 & \text{αν } k < m \\ \frac{k!}{m!(k-m)!} & \text{αν } k \geq m \end{cases}.$$

Επομένως ο όρος $A_{j_1 j_2 k_1 k_2} \cdot x_1^{j_1} x_2^{j_2} y_1^{k_1} y_2^{k_2}$ συνεισφέρει στους συντελεστές των όρων $\xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} \eta_1^{j_1+k_1-l_1} \eta_2^{j_2+k_2-l_2}$ με $l_1 \in [0, j_1+k_1]$ και $l_2 \in [0, j_2+k_2]$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση (Γ.5.8) μετασχηματίζεται σ' ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού s στις μιγαδικές συντεταγμένες ξ , η . Κάνοντας την αντίστροφη διαδικασία προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές της μιγαδικής σειράς (Γ.5.14) θεωρώντας γνωστούς τους συντελεστές της πραγματικής σειράς (Γ.5.8). Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του όρου $\xi_1^{l_1} \xi_2^{l_2} \eta_1^{j_1+k_1-l_1} \eta_2^{j_2+k_2-l_2}$ προκύπτει από τους συντελεστές των όρων $x_1^{m_1} x_2^{m_2} y_1^{j_1+k_1-m_1} y_2^{j_2+k_2-m_2}$ με $m_1 \in [0, j_1+k_1]$ και $m_2 \in [0, j_2+k_2]$. Επομένως οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς (Γ.5.4) προσδιορίζονται από τους γνωστούς συντελεστές της πραγματικής σειράς (Γ.5.6) σύμφωνα με τη σχέση :

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} = \sum_{j_1=0}^{\alpha_1 + \beta_1} \sum_{j_2=0}^{\alpha_2 + \beta_2} \left\{ A_{j_1 j_2, \alpha_1 + \beta_1 - j_1, \alpha_2 + \beta_2 - j_2} \frac{i^{s-(j_1+j_2)}}{2^{\frac{s}{2}}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\sum_{m=\max(j_1-\beta_1, 0)}^{\min(\alpha_1, j_1)} i^{j_1-m} \binom{j_1}{m} (-i)^{\beta_1-j_1+m} \binom{\alpha_1 + \beta_1 - j_1}{\alpha_1 - m} \right] \right. \\ \left. \cdot \left[\sum_{m=\max(j_2-\beta_2, 0)}^{\min(\alpha_2, j_2)} i^{j_2-m} \binom{j_2}{m} (-i)^{\beta_2-j_2+m} \binom{\alpha_2 + \beta_2 - j_2}{\alpha_2 - m} \right] \right\} \quad (\Gamma.5.18).$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (Γ.5.13) στη μιγαδική συνάρτηση (Γ.5.14) έχουμε :

$$f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \cdot \left(\frac{r_1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha_1} e^{-i\alpha_1 \theta_1} \left(\frac{r_2}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha_2} e^{-i\alpha_2 \theta_2} \left(\frac{-ir_1}{\sqrt{2}} \right)^{\beta_1} e^{i\beta_1 \theta_1} \left(\frac{-ir_2}{\sqrt{2}} \right)^{\beta_2} e^{i\beta_2 \theta_2} \Rightarrow \\ f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \cdot r_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot r_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot (-i)^{\beta_1 + \beta_2} \cdot e^{i(\beta_1 - \alpha_1)\theta_1} \cdot e^{i(\beta_2 - \alpha_2)\theta_2} \quad (\Gamma.5.19).$$

Επομένως η σχέση (Γ.5.9) σύμφωνα με τις (Γ.5.11) και (Γ.5.19) μας δίνει :

$$|f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)|_{\rho R} \leq \frac{1}{2^{\frac{s}{2}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \left\{ |C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}| \cdot \rho^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot R_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot \rho^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot R_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \right. \\ \left. \cdot |-i|^{\beta_1 + \beta_2} \cdot |e^{i(\beta_1 - \alpha_1)\theta_1}| \cdot |e^{i(\beta_2 - \alpha_2)\theta_2}| \right\} \Rightarrow \\ |f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)|_{\rho R} \leq \frac{\rho^s}{2^{\frac{s}{2}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} |C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}| \cdot R_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot R_2^{\alpha_2 + \beta_2} \quad (\Gamma.5.20).$$

Άρα για το ελάχιστο άνω φράγμα της f στην περιοχή $\Delta_{\rho R}$ έχουμε :

$$|f(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)|_{\rho R} \leq \|f\|_{\rho R} \quad (\Gamma.5.21),$$

όπου $\|f\|_{\rho R}$ η νόρμα που ορίζεται από τη σχέση :

$$\|f\|_{\rho R} = \frac{\rho^s}{2^{\frac{s}{2}}} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} |C_{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}| \cdot R_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot R_2^{\alpha_2 + \beta_2} \quad (\Gamma.5.22).$$

Είναι φανερό ότι η παραπάνω νόρμα ικανοποιεί τη σχέση :

$$\|f\|_{\rho R} = \rho^s \cdot \|f\|_R \quad (\Gamma.5.23).$$

Χρησιμοποιώντας τη νόρμα που ορίζεται από τη σχέση (Γ.5.22) έχουμε καλύτερα αποτελέσματα απ' ότι αν εργάζόμασταν με τη νόρμα της σχέσης (Γ.2.22). Αυτό γίνεται

φανερό από το εξής απλό παράδειγμα. Για τη συνάρτηση $f(x,y) = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$ με $R_1=R_2=1$ έχουμε $\|f\|_{pR} = 4\rho^2$ σύμφωνα με τη σχέση (Γ.2.22), ενώ $\|f\|_{pR} = 2\rho^2$ σύμφωνα με τη σχέση (Γ.5.22).

Για να βρούμε την περιοχή για την οποία έχουμε πρακτική ευστάθεια εργαζόμαστε στο χώρο των κανονικών μεταβλητών x', y' . Από τις σχέσεις (Γ.5.4) και (Γ.5.7) είναι φανερό ότι :

$$(x', y') \in \Delta_{pR} \Leftrightarrow I'_j \leq \frac{1}{2} \rho^2 R_j^2 , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.24).$$

Εστω ότι η αρχική συνθήκη μιας τροχιάς βρίσκεται μέσα στην περιοχή Δ_{p_0R} όπου p_0 μια δεδομένη θετική σταθερά. Ζητάμε να βρούμε το χρόνο t , για τον οποίο η τροχιά αυτή θα παραμείνει σε μια μεγαλύτερη περιοχή Δ_{pR} με $\rho > p_0$. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται χρόνος διαφυγής. Η ανισότητα :

$$\left| I'_j(t) - I'_j(0) \right| \leq |t| \cdot \sup_{\Delta_{pR}} |I'_j| , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.25),$$

προφανώς ισχύει για όσο χρόνο η τροχιά βρίσκεται στην περιοχή Δ_{pR} . Η τιμή $\sup_{\Delta_{pR}} |I'_j|$ υπολογίζεται δύσκολα. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η ποσότητα I'_j υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (Γ.5.6). Γράφοντας το υπόλοιπο $Y^{(r)}$ σε μορφή δυναμοσειράς :

$$Y^{(r)} = Y_{r+1}^{(r)} + Y_{r+2}^{(r)} + \dots \quad (\Gamma.5.26),$$

καταλαβαίνουμε ότι είναι αδύνατο να υπολογίσουμε τους όρους όλων των τάξεων. Αντιθέτως ο πρώτος όρος $Y_{r+1}^{(r)}$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, οπότε χρησιμοποιούμε την προσέγγιση :

$$\sup_{\Delta_{pR}} |I'_j| < 2 \cdot \left\| [I'_j , Y_{r+1}^{(r)}] \right\|_{pR} , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.5.27).$$

Σύμφωνα με διάφορες εκτιμήσεις (Giorgilli et al. 1989) μπορούμε να δείξουμε ότι η δυναμοσειρά του υπόλοιπου (Σχέση Γ.5.26) είναι συγκλίνουσα σε μια περιοχή Δ_{pR} , αν η τιμή της ποσότητας ρ είναι αρκετά μικρή. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ισχύει :

$$\left\| Y_s^{(r)} \right\|_R < C^{s-r-1} \cdot D \quad (\Gamma.5.28),$$

όπου C μια θετική σταθερά και $D = \| Y_{r+1}^{(r)} \|_R$. Η ποσότητα C^{-1} είναι η ακτίνα σύγκλισης ρ της σειράς. Επιλέγοντας λοιπόν $\rho \leq C^{-1}/2$ το ελάχιστο άνω φράγμα του υπόλοιπου δεν υπερβαίνει το διπλάσιο της νόρμας του πρώτου όρου $Y_{r+1}^{(r)}$. Αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί την παρουσία του παράγοντα 2 στην ανισότητα (Γ.5.27). Πρέπει βεβαίως να ελέγξουμε ότι οι πραγματικές τιμές της παραμέτρου ρ ικανοποιούν τον παραπάνω περιορισμό. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε αυτό το θέμα λεπτομερέστερα.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ.5.25) και (Γ.5.27) υπολογίζουμε το χρόνο διαφυγής $\tau_r(\rho_0, \rho)$ ως εξής :

$$\tau_r(\rho_0, \rho) = \min_{j=1,2} \frac{R_j^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{4 \cdot \left\| \begin{bmatrix} I'_j, Y_{r+1}^{(r)} \end{bmatrix} \right\|_R} \quad (\Gamma.5.29).$$

Παίρνουμε τη μικρότερη τιμή του δεξιού μέρους της ισότητας (Γ.5.29) γιατί όταν η τροχιά βρεθεί έξω από την προβολή της περιοχής $\Delta_{\rho R}$ σ' ένα τουλάχιστον από τα δύο επίπεδα $x_1 y_1, x_2 y_2$ βρίσκεται και εκτός της περιοχής $\Delta_{\rho R}$. Ο χρόνος διαφυγής $\tau_r(\rho_0, \rho)$ εξαρτάται από την τάξη r μέχρι την οποία έχουμε αναπτύξει την κανονική μορφή της Χαμιλτονιανής και από τις ακτίνες ρ_0 και ρ της αρχικής και τελικής περιοχής αντίστοιχα, στην οποία βρίσκεται η τροχιά. Αίροντας την εξάρτηση από τις ποσότητες r και ρ , ο χρόνος διαφυγής θα εξαρτάται μόνο από τις αρχικές συνθήκες της τροχιάς και συγκεκριμένα από την ακτίνα ρ_0 της αρχικής περιοχής $\Delta_{\rho_0 R}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (Γ.5.23) η ισότητα (Γ.5.29) γράφεται ως εξής :

$$\tau_r(\rho_0, \rho) = \min_{j=1,2} \frac{R_j^2(\rho^2 - \rho_0^2)}{4 \cdot \rho^{r+1} \cdot \left\| \begin{bmatrix} I'_j, Y_{r+1}^{(r)} \end{bmatrix} \right\|_R} \quad (\Gamma.5.30).$$

Ο χρόνος διαφυγής εξαρτάται από τελική ακτίνα ρ μέσω του όρου $\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^{r+1}}$, ο οποίος παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν :

$$\rho = \tilde{\rho} = \rho_0 \sqrt{\frac{r+1}{r-1}} \quad (\Gamma.5.31).$$

Είναι λογικό ότι όσο μεγαλώνει η τελική περιοχή $\Delta_{\rho R}$ μεγαλώνει και ο χρόνος διαφυγής, δηλαδή $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \tau_r(\rho_0, \rho) = +\infty$, κάτι το οποίο δε φαίνεται από την παραπάνω σχέση, αφού ο χρόνος διαφυγής γίνεται μέγιστος για πεπερασμένη τιμή της ακτίνας ρ . Αυτό οφείλεται στο ότι για κάθε τελική περιοχή $\Delta_{\rho R}$ παίρνουμε διαφορετική ταχύτητα μεταβολής του προσεγγιστικού ολοκληρώματος I'_j :

$$\sup_{\Delta_{\rho R}} |I'_j| = 2\rho^{r+1} \cdot \left\| \begin{bmatrix} I'_j, Y_{r+1}^{(r)} \end{bmatrix} \right\|_R \quad (\Gamma.5.32),$$

η οποία εξαρτάται από την ακτίνα ρ . Υπερεκτιμώντας λοιπόν την ταχύτητα μεταβολής $|I'_j|$, τη θεωρούμε ίση με αυτή που έχουμε στο όριο της περιοχής. Γι' αυτό το λόγο ο χρόνος διαφυγής παρουσιάζει μέγιστο για $\rho = \tilde{\rho}$. Είναι φανερό ότι με αυτήν την προσέγγιση υποεκτιμάμε το χρόνο διαφυγής.

Θέτοντας τώρα $\rho = \tilde{\rho}$ στο δεξιό μέρος της ισότητας (Γ.5.30) ο χρόνος διαφυγής εξαρτάται μόνο από τις ποσότητες ρ_0 και r . Διατηρώντας την εξάρτηση από το ρ_0 υπολογίζουμε την τιμή της ποσότητας $\tau_r(\rho_0, \tilde{\rho})$ για όλες τις τάξεις r με $3 \leq r \leq \tilde{r}$, όπου \tilde{r} η

μέγιστη τάξη μέχρι την οποία έχουμε υπολογίσει την κανονική μορφή της Χαμιλτονιανής. Η βέλτιστη τιμή r_{opt} είναι αυτή για την οποία ο χρόνος διαφυγής γίνεται μέγιστος.

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε το χρόνο διαφυγής συναρτήσει μόνο της ακτίνας ρ_0 της αρχικής περιοχής $\Delta_{\rho_0 R}$ σύμφωνα με τη σχέση :

$$T(\rho_0) = \max_{3 \leq r \leq \tilde{r}} \tau_r(\rho_0, \tilde{\rho}) \quad (\Gamma.5.33).$$

Αυτή η σχέση μας καθορίζει επίσης την περιοχή, για την οποία το σύστημα είναι πρακτικά ευσταθές, αφού δίνοντας μια πεπερασμένη τιμή στο χρόνο διαφυγής (για παράδειγμα να είναι ίσος με την ηλικία του σύμπαντος), προσδιορίζουμε την ακτίνα ρ_0 της αρχικής περιοχής $\Delta_{\rho_0 R}$. Επομένως όλες οι τροχιές με αρχικές συνθήκες στην περιοχή $\Delta_{\rho_0 R}$ παραμένουν για το συγκεκριμένο χρόνο διαφυγής στην περιοχή $\Delta_{\tilde{r}R}$.

Γ.6. Αριθμητικά αποτελέσματα για το σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή.

Στη μελέτη μας χρησιμοποιήσαμε πολύ συχνά συναρτήσεις σε μορφή δυναμοσειρών, οπότε ο τρόπος αποθήκευσης στη μνήμη του υπολογιστή και επανάκτησης από αυτή, ενός πολυωνύμου πολλών μεταβλητών, είναι ένα σημαντικό πρόβλημα. Ένα πολυώνυμο $f(x,y)$ αποθηκεύεται στον υπολογιστή ως μια σειρά πραγματικών αριθμών $f_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ σ' ένα μονοδιάστατο πίνακα. Ο αριθμός $f_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ είναι ο συντελεστής του μονωνύμου $x_1^{j_1} x_2^{j_2} y_1^{j_3} y_2^{j_4}$. Η διεύθυνση n μέσα στο μονοδιάστατο πίνακα, στην οποία βρίσκεται ο συντελεστής $f_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ δίνεται από τη σχέση (Giorgilli 1979) :

$$n = \sum_{m=1}^4 \binom{m-1 + \sum_{k=0}^{m-1} j_{4-k}}{m} \quad (\Gamma.6.1).$$

Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται μια ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στις διευθύνσεις n και στις διατεταγμένες τετράδες των εκθετών (j_1, j_2, j_3, j_4).

Πέρα όμως από τα προγράμματα που αποθηκεύουν στη μνήμη του υπολογιστή και επανακτούν από αυτή τα αναπτύγματα των διαφόρων συναρτήσεων, χρειαζόμαστε και προγράμματα, τα οποία εκτελούν απλές αλγεβρικές πράξεις επί αυτών των πολυωνύμων, όπως προσθέσεις, πολλαπλασιασμούς, διαφορίσεις, γραμμικούς μετασχηματισμούς και αγκύλες Poisson. Επίσης χρειαζόμαστε προγράμματα, τα οποία υπολογίζουν την κανονική μορφή της Χαμιλτονιανής Z και τη γεννήτρια συνάρτηση X λύνοντας σταδιακά την εξίσωση (Γ.4.10), σύμφωνα με τη μέθοδο που αναφέραμε στην παράγραφο Γ.4. Λεπτομερή περιγραφή αυτών των προγραμμάτων έχει δώσει ο Giorgilli (1979).

Επειδή όπως έχουμε ήδη αναφέρει είναι αδύνατο να μελετήσουμε αριθμητικά δυναμοσειρές με άπειρο πλήθος όρων σταματάμε τα αναπτύγματα των διαφόρων συναρτήσεων μέχρι όρους τάξης $\tilde{r} = 35$. Το ανάπτυγμα μας συνάρτησης 4 μεταβλητών μέχρι όρους τάξης 35 έχει 82.251 συντελεστές. Από την άλλη μεριά, κατά τη διάρκεια της λύσης της εξίσωσης (Γ.4.10) για τον υπολογισμό της κανονικής μορφής Z της Χαμιλτονιανής, χρησιμοποιούμε ταυτόχρονα αρκετές συναρτήσεις, το πλήθος των όρων των οποίων είναι 2.549.782. Λόγω του μεγάλου πλήθους των συντελεστών τους οποίους διαχειρίζεται το υπολογιστικό πρόγραμμα, αλλά και επιπλέον για να μη γίνει ιδιαίτερα

χρονοβόρα η κατασκευή της συνάρτησης Z , σταματήσαμε τα διάφορα αναπτύγματα στην τάξη $\tilde{r} = 35$.

Αναπτύξαμε τη Χαμιλτονιανή (Γ.3.10) σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $(x, y, p_x, p_y) = (0, 0, 0, 0)$ και στη συνάρτηση που προέκυψε εφαρμόσαμε το μετασχηματισμό (Γ.3.23). Με αυτόν τον τρόπο καταλήξαμε σε μια Χαμιλτονιανή συνάρτηση υπό μορφή δυναμοσειράς :

$$H = H_2 + H_3 + \dots + H_{\tilde{r}} \quad (\Gamma.6.2),$$

όπου ο όρος δεύτερης τάξης H_2 δίνεται από τη σχέση (Γ.3.27). Οι συχνότητες ω_1, ω_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις (Γ.3.19) και (Γ.3.25) και είναι :

$$\omega_1 \approx 9,9675752552 \times 10^{-1}, \quad \omega_2 \approx -8,0463875837 \times 10^{-2} \quad (\Gamma.6.3).$$

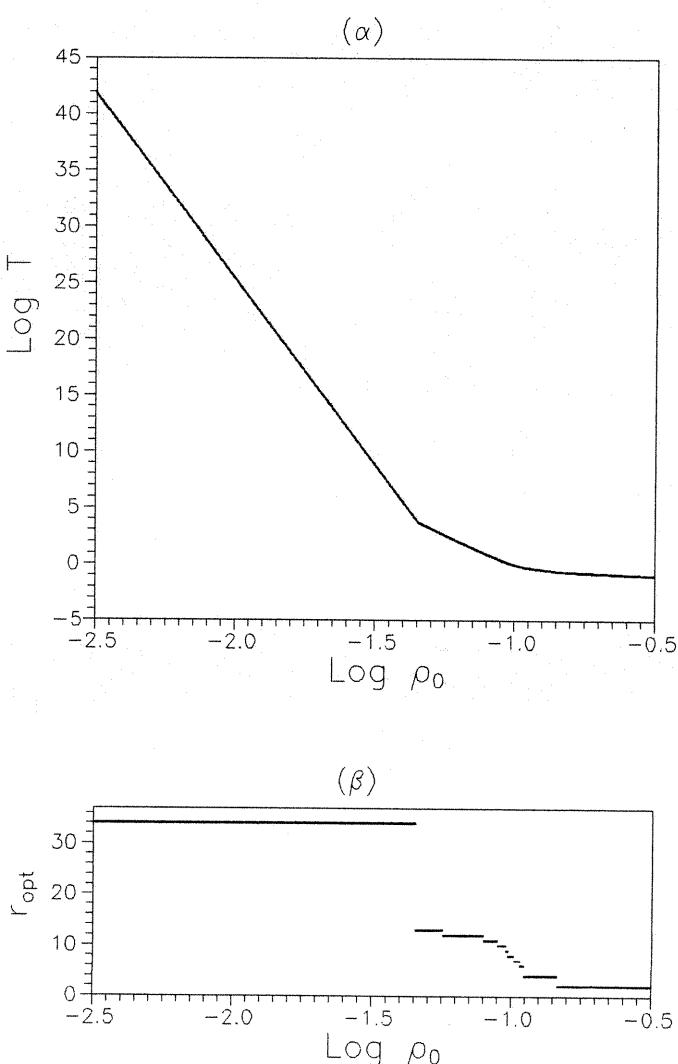
Στη συνέχεια, λύνοντας την εξίσωση (Γ.4.10), προσδιορίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $X^{(\tilde{r})}$ (Σχέση Γ.5.1) καθώς και την κανονική μορφή της Χαμιλτονιανής $Z^{(\tilde{r})}$ (Σχέση Γ.5.3). Ταυτόχρονα για κάθε τάξη $3 \leq r < \tilde{r}$ υπολογίζουμε τους συντελεστές του πρώτου όρου του υπολοίπου $Y_{r+1}^{(r)}$, τους οποίους χρησιμοποιούμε στη σχέση (Γ.5.27). Σημειώνουμε ότι γνωρίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση $X^{(\tilde{r})}$ μπορούμε να υπολογίζουμε τον κανονικό μετασχηματισμό (Γ.5.2) και τον αντίστροφο του, όπως επίσης και το μετασχηματισμό οποιασδήποτε συνάρτησης από και προς τις κανονικές μεταβλητές χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_x , η δράση του οποίου καθορίζεται από τη σχέση (Γ.4.6).

Τέλος εφαρμόζοντας τη διαδικασία που περιγράφουμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου, υπολογίζουμε το χρόνο διαφυγής συναρτήσει της ακτίνας r_0 της περιοχής, στην οποία βρίσκεται αρχικά μια τροχιά. Σημειώνουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα εξαρτάται φυσικά από την επιλογή των σταθερών R_1, R_2 που εμφανίζονται στον ορισμό της νόρμας (Γ.5.22).

Αρχικά, κάνοντας μια γενική προσέγγιση του προβλήματος της πρακτικής ευστάθειας θέτουμε $R_1 = R_2 = 1$. Στο σχήμα Γ.2 φαίνονται τα αποτελέσματα μας. Συγκεκριμένα στο σχήμα Γ.2α σχεδιάζουμε το χρόνο διαφυγής T (Σχέση Γ.5.33) συναρτήσει της ακτίνας r_0 της αρχικής περιοχής $\Delta_{p_0 R}$. Υπενθυμίζουμε ότι αυτός είναι ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται μια τροχιά με αρχικές συνθήκες στην περιοχή $\Delta_{p_0 R}$ για να βρεθεί έξω από την περιοχή $\Delta_{p R}$, όπου η τιμή της ακτίνας r δίνεται από τη σχέση (Γ.5.31). Η τιμή της τάξης r που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του χρόνου διαφυγής $T(r_0)$ είναι η βέλτιστη τιμή (r_{opt}) με την οποία που αναφέραμε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου. Στο σχήμα Γ.2β σχεδιάζουμε τη βέλτιστη τάξη r_{opt} συναρτήσει της αρχικής ακτίνας r_0 .

Παρατηρώντας προσεκτικότερα την καμπύλη του σχήματος Γ.2α, βλέπουμε ότι αποτελείται από σχεδόν ευθύγραμμα τμήματα, η κλίση των οποίων αλλάζει, όταν αλλάζει η τιμή της βέλτιστης τάξης (Σχήμα Γ.2β). Αυτή η συμπεριφορά γίνεται εύκολα αντιληπτή από τη σχέση (Γ.5.30). Έτσι όταν η βέλτιστη τάξη παραμένει σταθερή, έχουμε μια ομαλή μεταβολή του χρόνου διαφυγής T , συναρτήσει της ακτίνας r_0 , η οποία οδηγεί στην εμφάνιση ενός σχεδόν ευθύγραμμου τμήματος με αρνητική κλίση στο σχήμα Γ.2α. Όσο όμως μεγαλώνει η τιμή της ακτίνας r_0 , η βέλτιστη τάξη μειώνεται, όπως φαίνεται από το σχήμα Γ.2β, οπότε στο σχήμα Γ.2α εμφανίζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερης κλίσης (δηλαδή απολύτως μικρότερης κλίσης) από πριν. Αυτό συμβαίνει γιατί το νέο ευθύγραμμο τμήμα θα πρέπει να βρίσκεται πάνω από την προέκταση του τμήματος που

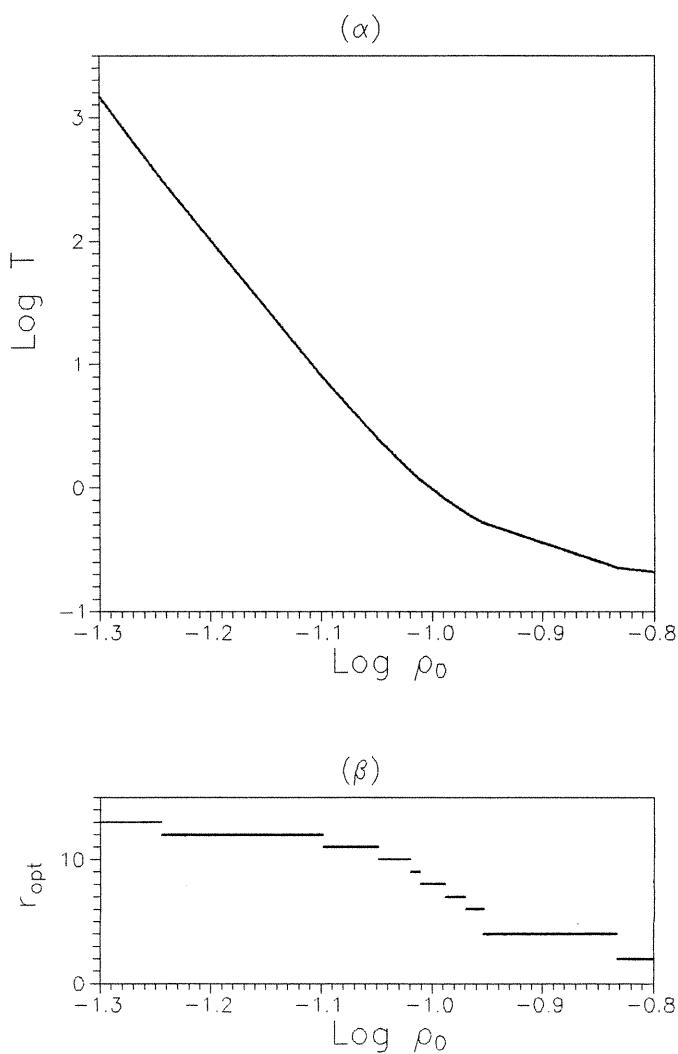
είχαμε για μικρότερες τιμές της ακτίνας ρ_0 , αφού η αλλαγή της τιμής της βέλτιστης τάξης r_{opt} σημαίνει ακριβώς, ότι η τιμή του χρόνου διαφυγής T που θα παίρναμε για την αρχική r_{opt} είναι μικρότερη από την τιμή που μας δίνει η νέα, μικρότερη, βέλτιστη τάξη. Αυτές οι αλλαγές της κλίσης γίνονται αντιληπτές καλύτερα στα σχήματα Γ.3, όπου φαίνονται σε μεγέθυνση οι περιοχές των σχημάτων Γ.2, στις οποίες συμβαίνουν αρκετές αλλαγές της βέλτιστης τάξης. Σημειώνουμε πάντως ότι η βέλτιστη τάξη δε μπορεί να υπερβεί την τιμή 34, αφού οι υπολογισμοί του υπολοίπου, όπως και όλων των άλλων συναρτήσεων, έγιναν μέχρι και τάξη $\tilde{r} = 35$.



Σχήμα Γ.2 : (α) Ο χρόνος διαφυγής T συναρτήσει της ακτίνας ρ_0 της αρχικής περιοχής $\Delta_{\rho_0 R}$ για $R_1=R_2=1$. Και στους δύο άξονες χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα. (β) Η βέλτιστη τάξη r_{opt} συναρτήσει της ακτίνας ρ_0 .

Το ότι η τιμή της βέλτιστης τάξης μειώνεται όταν αυξάνει η τιμή της ακτίνας ρ_0 , γίνεται αντιληπτό από τη μορφή της σχέσης (Γ.5.30). Σημειώνουμε ότι η τιμή της παραμέτρου ρ δίνεται από τη σχέση (Γ.5.31). Επομένως ο όρος $\rho^2 - \rho_0^2 = \frac{2\rho_0^2}{r-1}$ δε

μεταβάλλεται σημαντικά αφού $3 \leq r \leq 35$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ουσιαστικά η εξάρτηση από την τάξη r εμφανίζεται στον όρο $\rho_0^{r+1} \cdot \| [I'_j, Y_{r+1}^{(r)}] \|_R$. Όταν οι τιμές της ακτίνας ρ_0 είναι σχετικά μεγάλες ($\log \rho_0 > -1,3$), αύξηση της τάξης r αυξάνει κατά πολύ την ποσότητα $\| [I'_j, Y_{r+1}^{(r)}] \|_R$ αφού αυξάνει το πλήθος των συντελεστών του υπολοίπου $Y_{r+1}^{(r)}$, ενώ αντιθέτως μειώνεται σχετικά λίγο η τιμή του όρου ρ_0^{r+1} . Συνήθως όμως αυτή η μείωση δεν υπερκαλύπτει την αύξηση του όρου $\| [I'_j, Y_{r+1}^{(r)}] \|_R$ με αποτέλεσμα η βέλτιστη τάξη να ελαττώνεται (Σχήμα Γ.3β).



Σχήμα Γ.3 : Μεγέθυνση των σχημάτων Γ.2α και β στην περιοχή όπου συμβαίνουν αρκετές αλλαγές της τιμής της βέλτιστης τάξης r_{opt} .

Θα υπολογίσουμε τώρα το μέγεθος της περιοχής για την οποία έχουμε εξασφαλίσει την πρακτική ευστάθεια για χρόνο ίσο με την ηλικία του σύμπαντος. Επειδή όπως έχουμε αναφέρει η μονάδα μέτρησης του χρόνου στο σύστημα μας ισούται με $(2\pi)^{-1} \cdot T_J$ όπου T_J η

περίοδος περιφοράς του Δία, η ηλικία του σύμπαντος είναι περίπου 10^{10} χρονικές μονάδες. Η τιμή της παραμέτρου ρ_0 που αντιστοιχεί σ' αυτόν το χρόνο διαφυγής είναι :

$$\rho_0 \cong 2,911 \times 10^{-2} \quad (\Gamma.6.4),$$

αφού $\text{Log } \rho_0 \cong -1,536$, όπως φαίνεται και στο σχήμα Γ.2α. Η αντίστοιχη βέλτιστη τάξη είναι $r_{\text{opt}} = 34$ (Σχήμα Γ.2β).

Επειδή η περιοχή πρακτικής ευστάθειας υπολογίζεται στις κανονικές μεταβλητές πρέπει να τη μετασχηματίσουμε στις παλιές μεταβλητές για να δούμε αν έχει φυσικό νόημα. Αυτή η διαδικασία είναι πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθεί, μπορούμε όμως σχετικά εύκολα να έχουμε μια εκτίμηση της περιοχής πρακτικής ευστάθειας στις παλιές μεταβλητές. Θεωρώντας ότι ο μετασχηματισμός από τις παλιές μεταβλητές στις κανονικές μεταβλητές :

$$x = T_{X^{(r)}}^{-1} x' , \quad y = T_{X^{(r)}}^{-1} y' \quad (\Gamma.6.5),$$

δηλαδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός του (Γ.5.2), είναι καλά ορισμένος στην περιοχή $\Delta_{\rho_0 R}$, η εικόνα της $T_{X^{(r)}}^{-1}(\Delta_{\rho_0 R})$ θα αποτελείται από σχεδόν κυκλικές περιοχές στα επίπεδα $x_1 y_1$ και $x_2 y_2$. Μια εκτίμηση του μεγέθους αυτών των περιοχών γίνεται ως εξής. Θεωρούμε τις ποσότητες $I_j = (x_j^2 + y_j^2)/2$ και $I'_j = (x_j'^2 + y_j'^2)/2$, $j=1,2$, στις παλιές και στις κανονικές συντεταγμένες αντίστοιχα. Θεωρούμε επίσης τη μετασχηματισμένη μορφή της συνάρτησης I_j στις κανονικές μεταβλητές :

$$I_j(x,y) \Big|_{x = T_{X^{(r)}}^{-1} x', y = T_{X^{(r)}}^{-1} y'} = (T_{X^{(r)}}^{-1} I_j)(x',y') \quad (\Gamma.6.6).$$

Το δεξιό μέρος της παραπάνω σχέσης είναι μια δυναμοσειρά, ο όρος μικρότερης τάξης της οποίας είναι ακριβώς I'_j , οπότε μπορεί να γραφεί ως :

$$T_{X^{(r)}}^{-1} I_j = I'_j + \Phi_j^{(3)} + \Phi_j^{(4)} + \dots , \quad j=1,2 \quad (\Gamma.6.7).$$

Έχουμε επομένως την προσεγγιστική εκτίμηση :

$$\left| I_j - I'_j \right|_{\rho_0 R} < \rho_0^3 \cdot \left\| \Phi_j^{(3)} \right\|_R + \dots + \rho_0^{\tilde{r}} \cdot \left\| \Phi_j^{(\tilde{r})} \right\|_R \quad (\Gamma.6.8),$$

Θεωρώντας βέβαια ότι η τιμή της ακτίνας ρ_0 είναι μικρότερη από το μισό της ακτίνας σύγκλισης των δυναμοσειρών (Γ.6.5). Το ανάπτυγμα (Γ.6.7) υπολογίζεται μέχρι και όρους τάξης $\tilde{r} = 35$. Στον πίνακα Γ.1 αναφέρονται οι τιμές των ποσοτήτων $\left\| \Phi_j^{(s)} \right\|_R$ για $s=3,\dots,\tilde{r}$ και $j=1,2$. Με βάση τα στοιχεία αυτού του πίνακα η σχέση (Γ.6.8) μας δίνει :

$$\begin{aligned} \left| I_1 - I'_1 \right|_{\rho_0 R} &\cong 5,032 \times 10^{-5} < 0,119 \cdot I'_1 \\ \left| I_2 - I'_2 \right|_{\rho_0 R} &\cong 1,834 \times 10^{-4} < 0,217 \cdot I'_2 \end{aligned} \quad (\Gamma.6.9).$$

Επομένως η περιοχή πρακτικής ευστάθειας στις παλιές μεταβλητές περιέχει κυκλικές περιοχές στα επίπεδα $x_1 y_1$ και $x_2 y_2$ ακτίνας τουλάχιστον :

$$\rho = \sqrt{\rho_0^2 - 2 \left| I_2 - I'_2 \right|_{\rho_0 R}} \cong 2,192 \times 10^{-2} \quad (\Gamma.6.10).$$

Παρατηρούμε ότι οι ακτίνες των περιοχών ευστάθειας στις παλιές (Σχέση Γ.6.10) και στις κανονικές συντεταγμένες (Σχέση Γ.6.4) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους και επιπλέον πολύ κοντά η μια στην άλλη. Οι συντεταγμένες του Δία στις παλιές μεταβλητές είναι $(1,307022 \times 10^{-3}, -3,990948 \times 10^{-3}, -4,541613 \times 10^{-3}, 1,717878 \times 10^{-1})$. Επομένως ο Δίας βρίσκεται στα όρια μιας περιοχής ακτίνας $\rho_j \cong 1,718342 \times 10^{-1}$. Άρα η ακτίνα της περιοχής πρακτικής ευστάθειας είναι περίπου 0,127 φορές η απόσταση του Δία από το σημείο L_4 . Αυτή η εκτίμηση αποτελεί σημαντική βελτίωση ανάλογων προγενέστερων αποτελεσμάτων. Αναφέρουμε για παράδειγμα ότι η ακτίνα της περιοχής της πρακτικής ευστάθειας που είχαν βρει οι Simó (1989) και Celletti & Giorgilli (1991) ήταν περίπου $4,206 \times 10^{-5}$ φορές η απόσταση του Δία από το σημείο L_4 . Επομένως βελτιώσαμε αυτό το αποτέλεσμα κατά έναν παράγοντα 3000. Σημειώνουμε επίσης ότι η εκτίμηση των Giorgilli et al. (1989), η οποία ήταν καθαρά αναλυτική, βελτιώθηκε κατά έναν παράγοντα 10^7 .

s	$\ \Phi_1^{(s)}\ _R$	$\ \Phi_2^{(s)}\ _R$	s	$\ \Phi_1^{(s)}\ _R$	$\ \Phi_2^{(s)}\ _R$
3	1,480	6,139	20	$4,522 \times 10^{16}$	$2,804 \times 10^{17}$
4	$1,502 \times 10^1$	$3,557 \times 10^1$	21	$9,897 \times 10^{17}$	$5,111 \times 10^{18}$
5	$1,134 \times 10^2$	$2,434 \times 10^2$	22	$1,099 \times 10^{19}$	$6,491 \times 10^{19}$
6	$8,825 \times 10^2$	$1,760 \times 10^3$	23	$2,407 \times 10^{20}$	$1,227 \times 10^{21}$
7	$6,281 \times 10^3$	$1,329 \times 10^4$	24	$2,774 \times 10^{21}$	$1,523 \times 10^{22}$
8	$4,447 \times 10^4$	$1,022 \times 10^5$	25	$6,978 \times 10^{22}$	$3,474 \times 10^{23}$
9	$3,057 \times 10^5$	$8,173 \times 10^5$	26	$8,641 \times 10^{23}$	$4,028 \times 10^{24}$
10	$2,111 \times 10^6$	$6,684 \times 10^6$	27	$2,840 \times 10^{25}$	$1,315 \times 10^{26}$
11	$1,513 \times 10^7$	$5,654 \times 10^7$	28	$3,784 \times 10^{26}$	$1,320 \times 10^{27}$
12	$1,098 \times 10^8$	$4,851 \times 10^8$	29	$1,701 \times 10^{28}$	$7,133 \times 10^{28}$
13	$8,794 \times 10^8$	$4,718 \times 10^9$	30	$2,319 \times 10^{29}$	$6,197 \times 10^{29}$
14	$7,166 \times 10^9$	$4,471 \times 10^{10}$	31	$1,256 \times 10^{31}$	$4,940 \times 10^{31}$
15	$8,388 \times 10^{10}$	$5,729 \times 10^{11}$	32	$1,772 \times 10^{32}$	$3,978 \times 10^{32}$
16	$8,328 \times 10^{11}$	$6,170 \times 10^{12}$	33	$1,107 \times 10^{34}$	$4,063 \times 10^{34}$
17	$1,643 \times 10^{13}$	$1,031 \times 10^{14}$	34	$1,516 \times 10^{35}$	$3,201 \times 10^{35}$
18	$1,806 \times 10^{14}$	$1,277 \times 10^{15}$	35	$1,055 \times 10^{37}$	$3,705 \times 10^{37}$
19	$4,049 \times 10^{15}$	$2,232 \times 10^{16}$			

Πίνακας Γ.1 : Οι τιμές των ποσοτήτων $\|\Phi_j^{(s)}\|_R$ με $j=1,2$ και $3 \leq s \leq 35$ όπου $\Phi_j^{(s)}$ οι όροι της δυναμοσειράς (Γ.6.7).

Ένας άλλος τρόπος για να εξετάσουμε τη φυσική σημασία της περιοχής πρακτικής ευστάθειας που βρήκαμε, είναι να ελέγξουμε αν οι πραγματικοί Τρωικοί αστεροειδείς βρίσκονται στο εσωτερικό αυτής της περιοχής. Χρησιμοποιώντας τον κατάλογο του 1994 για τους γνωστούς αστεροειδείς βρίσκουμε τα στοιχεία της θέσης των αστεροειδών μια συγκεκριμένη εποχή και συγκεκριμένα στις 14 Δεκεμβρίου 1994, Ιουλιανή μέρα = 2449700,5. Βρίσκουμε επίσης και τη θέση του Δία για την ίδια εποχή. Θεωρώντας τώρα ότι η τροχιά του Δία είναι κυκλική, προσδιορίζουμε τη θέση του σημείου L_4 . Στη συνέχεια βρίσκουμε τις συντεταγμένες των αστεροειδών σ' ένα καρτεσιανό περιστρεφόμενο

ηλιοκεντρικό σύστημα, ο οποίος του οποίου είναι κάθετος στο επίπεδο περιφοράς του Δία. Επειδή η μελέτη μας περιορίζεται στο επίπεδο πρόβλημα προβάλλουμε τους αστεροειδείς στο επίπεδο της τροχιάς του Δία, θέτοντας $z=0$. Ακολουθώντας τους μετασχηματισμούς που αναφέρουμε στην παράγραφο Γ.3 προσδιορίζουμε τις θέσεις των αστεροειδών στις μεταβλητές x_1, x_2, y_1, y_2 , ως προς τις οποίες ο όρος δεύτερης τάξης της Χαμιλτονιανής έχει διαγώνια μορφή (Σχέση Γ.3.27). Σ' αυτό το σημείο ορίζουμε τις αυθαίρετες ποσότητες R_1, R_2 , που εμφανίζονται στον υπολογισμό της νόρμας (Σχέση Γ.5.22) θέτοντας :

$$R_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.6.11),$$

για κάθε ένα αστεροειδή. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε την τιμή της ποσότητας ρ_0 για κάθε αστεροειδή, για την οποία εξασφαλίζεται η πρακτική ευστάθεια σε μια περιοχή $\Delta_{\rho_0 R}$. Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης φαίνονται στον πίνακα Γ.2. Σύμφωνα με τον τρόπο καθορισμού των ποσοτήτων R_j , $j=1,2$, (Σχέση Γ.6.11), καταλαβαίνουμε ότι ένας αστεροειδής βρίσκεται μέσα στην περιοχή πρακτικής ευστάθειας αν έχουμε $\rho_0 > 1$. Από τα στοιχεία του πίνακα Γ.2 βλέπουμε ότι τέσσερις αστεροειδείς βρίσκονται εντός της περιοχής πρακτικής ευστάθειας, ενώ στη χειρότερη περίπτωση χρειαζόμαστε ένα παράγοντα 30 για να μπορέσουμε να εγγυηθούμε την ευστάθεια όλων των αστεροειδών. Σημειώνουμε επίσης ότι μια βελτίωση των αποτελεσμάτων μας κατά ένα παράγοντα 10 θα εξασφαλίζε την ευστάθεια για τους περισσότερους αστεροειδείς. Επομένως οι εκτιμήσεις μας για την περιοχή της πραγματικής ευστάθειας είναι κατά πολύ βελτιωμένες σε σχέση με προγενέστερες εργασίες. Για παράδειγμα στην εργασία των Celletti & Giorgilli (1991), όχι μόνο κανείς αστεροειδής δε βρισκόταν εντός της περιοχής ευστάθειας, αλλά χρειαζόταν ένας παράγοντας 300 (στην καλύτερη περίπτωση) ως και 9.000 (στη χειρότερη περίπτωση), για να εξασφαλιστεί η ευστάθεια. Επομένως τα αποτελέσματα μας επιφέρουν μια βελτίωση στην εκτίμηση του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας κατά έναν παράγοντα 300.

Σε μερικά σημεία της μελέτης μας υπολογίσαμε κάποιες προσεγγιστικές τιμές, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα σειρών μέχρι κάποια δεδομένη τάξη ($\tilde{r} = 35$). Πιο συγκεκριμένα τέτοιους υπολογισμούς κάναμε όταν εκτιμήσαμε το μέγεθος του υπολοίπου $Y^{(t)}$ (Σχέση Γ.5.27), καθώς και όταν υπολογίσαμε το μέγεθος της περιοχής πρακτικής ευστάθειας στις παλιές συντεταγμένες x, y (Σχέση Γ.6.8). Και στις δύο περιπτώσεις το ερώτημα ήταν αν η περιοχή σύγκλισης των σειρών βρισκόταν εντός της περιοχής πρακτικής ευστάθειας $\Delta_{\rho_0 R}$. Το ίδιο ερώτημα ισχύει γενικότερα για όλα τα αναπτύγματα σειρών, όπως για παράδειγμα για την κανονική μορφή της Χαμιλτονιανής (Σχέση Γ.5.3), για τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων (Σχέσεις Γ.5.2 και Γ.6.5) κ.ο.κ. . Για να απλοποιήσουμε την εξέταση του προβλήματος θεωρούμε την περίπτωση όπου $R_1=R_2=1$, οπότε η τιμή της παραμέτρου ρ_0 είναι $\rho_0 \approx 2,911 \times 10^{-2}$ (Σχέση Γ.6.4).

Αρχικά θα επιχειρήσουμε μια αναλυτική προσέγγιση του ζητήματος. Αποδεικνύεται (Giorgilli et al. 1989) ότι αν η γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση :

$$\|X_s\|_R \leq a^{s-3} \cdot b, \quad s \geq 3 \quad (\Gamma.6.12),$$

για κάποιες θετικές σταθερές a και b , τότε ο μετασχηματισμός συντεταγμένων (Γ.5.2) συγκλίνει στην περιοχή $\Delta_{\rho R}$ με :

$$\rho = \left(3b + \frac{8a}{3} \right)^{-1} \quad (\Gamma.6.13).$$

N	R ₁	R ₂	ρ_0	r _{opt}
88181612	$3,130230 \times 10^{-2}$	$2,101250 \times 10^{-3}$	1,487790	33
89211605	$3,314960 \times 10^{-2}$	$1,959370 \times 10^{-2}$	1,135130	34
41790004	$1,651660 \times 10^{-2}$	$3,106310 \times 10^{-2}$	1,100990	34
1870	$3,871410 \times 10^{-2}$	$1,717610 \times 10^{-2}$	1,048060	33
2357	$4,234620 \times 10^{-2}$	$2,850950 \times 10^{-2}$	$8,470200 \times 10^{-1}$	34
5257	$3,183610 \times 10^{-2}$	$4,242410 \times 10^{-2}$	$7,504500 \times 10^{-1}$	34
88181912	$7,083260 \times 10^{-2}$	$6,687100 \times 10^{-3}$	$6,597200 \times 10^{-1}$	33
5233	$4,163300 \times 10^{-2}$	$4,662950 \times 10^{-2}$	$6,495000 \times 10^{-1}$	34
4708	$7,099190 \times 10^{-2}$	$1,894850 \times 10^{-2}$	$6,275300 \times 10^{-1}$	32
88181311	$3,914500 \times 10^{-2}$	$5,262120 \times 10^{-2}$	$6,063800 \times 10^{-1}$	34
1871	$5,121390 \times 10^{-2}$	$4,691570 \times 10^{-2}$	$6,000700 \times 10^{-1}$	34
31080004	$7,002890 \times 10^{-2}$	$2,745100 \times 10^{-2}$	$5,956600 \times 10^{-1}$	32
94031908	$1,443780 \times 10^{-2}$	$6,123500 \times 10^{-2}$	$5,928600 \times 10^{-1}$	34
2674	$6,527500 \times 10^{-2}$	$3,592170 \times 10^{-2}$	$5,894200 \times 10^{-1}$	34
88180412	$7,829610 \times 10^{-2}$	$1,451120 \times 10^{-2}$	$5,876200 \times 10^{-1}$	32
88180710	$5,420360 \times 10^{-2}$	$5,338740 \times 10^{-2}$	$5,425600 \times 10^{-1}$	34
88191102	$9,320020 \times 10^{-2}$	$1,316370 \times 10^{-2}$	$4,979700 \times 10^{-1}$	33
88182510	$8,859670 \times 10^{-2}$	$3,638490 \times 10^{-2}$	$4,658500 \times 10^{-1}$	32
2207	$1,747150 \times 10^{-2}$	$8,093470 \times 10^{-2}$	$4,487900 \times 10^{-1}$	34
89201902	$7,247770 \times 10^{-2}$	$6,844550 \times 10^{-2}$	$4,163900 \times 10^{-1}$	34
94031500	$4,552550 \times 10^{-2}$	$8,358320 \times 10^{-2}$	$4,075300 \times 10^{-1}$	34
89212405	$3,008840 \times 10^{-2}$	$8,992360 \times 10^{-2}$	$4,005000 \times 10^{-1}$	34
89211705	$6,369570 \times 10^{-2}$	$8,261660 \times 10^{-2}$	$3,826400 \times 10^{-1}$	34
5907	$9,759570 \times 10^{-2}$	$6,062860 \times 10^{-2}$	$3,790100 \times 10^{-1}$	34
88181411	$9,442780 \times 10^{-2}$	$6,523500 \times 10^{-2}$	$3,757900 \times 10^{-1}$	34
4792	$1,091900 \times 10^{-1}$	$5,448570 \times 10^{-2}$	$3,617700 \times 10^{-1}$	34
88180811	$1,160100 \times 10^{-1}$	$5,001570 \times 10^{-2}$	$3,519900 \times 10^{-1}$	33
3240	$1,362500 \times 10^{-1}$	$2,751300 \times 10^{-2}$	$3,359200 \times 10^{-1}$	32
5638	$1,079900 \times 10^{-1}$	$8,124580 \times 10^{-2}$	$3,162000 \times 10^{-1}$	34
43690004	$1,018300 \times 10^{-1}$	$9,101430 \times 10^{-2}$	$3,061600 \times 10^{-1}$	34
31630002	$1,430300 \times 10^{-1}$	$4,449490 \times 10^{-2}$	$3,046700 \times 10^{-1}$	32
4348	$1,265200 \times 10^{-1}$	$7,450120 \times 10^{-2}$	$2,977800 \times 10^{-1}$	34
4827	$5,760190 \times 10^{-2}$	$1,213100 \times 10^{-1}$	$2,868400 \times 10^{-1}$	34
4722	$1,354100 \times 10^{-1}$	$8,204770 \times 10^{-2}$	$2,755600 \times 10^{-1}$	34
1173	$1,600900 \times 10^{-1}$	$4,983620 \times 10^{-2}$	$2,721800 \times 10^{-1}$	32
10240002	$8,412220 \times 10^{-2}$	$1,368200 \times 10^{-1}$	$2,434500 \times 10^{-1}$	34
2594	$9,109540 \times 10^{-2}$	$1,393500 \times 10^{-1}$	$2,360100 \times 10^{-1}$	34

Πίνακας Γ.2

N	R ₁	R ₂	ρ ₀	r _{opt}
4829	6,679660×10 ⁻²	1,486500×10 ⁻¹	2,358500×10 ⁻¹	34
88180812	1,671900×10 ⁻¹	9,927530×10 ⁻²	2,247200×10 ⁻¹	34
4754	4,806640×10 ⁻²	1,677300×10 ⁻¹	2,157600×10 ⁻¹	34
4707	1,470000×10 ⁻¹	1,294500×10 ⁻¹	2,138800×10 ⁻¹	34
43170004	1,345900×10 ⁻¹	1,403400×10 ⁻¹	2,106900×10 ⁻¹	34
89210305	1,881300×10 ⁻¹	1,057300×10 ⁻¹	2,032200×10 ⁻¹	34
88182012	1,910400×10 ⁻¹	1,094400×10 ⁻¹	1,989500×10 ⁻¹	34
4805	1,221800×10 ⁻¹	1,606700×10 ⁻¹	1,974600×10 ⁻¹	34
5511	1,328100×10 ⁻¹	1,631800×10 ⁻¹	1,908600×10 ⁻¹	34
89211505	1,139400×10 ⁻¹	1,739200×10 ⁻¹	1,890100×10 ⁻¹	34
20350004	1,754200×10 ⁻¹	1,475100×10 ⁻¹	1,838900×10 ⁻¹	34
884	1,441100×10 ⁻¹	1,686700×10 ⁻¹	1,820300×10 ⁻¹	34
2893	1,219200×10 ⁻¹	1,871300×10 ⁻¹	1,758800×10 ⁻¹	34
1872	8,983270×10 ⁻²	2,039900×10 ⁻¹	1,723100×10 ⁻¹	34
88181213	1,130100×10 ⁻¹	2,026600×10 ⁻¹	1,673900×10 ⁻¹	34
51910004	1,823100×10 ⁻¹	1,740300×10 ⁻¹	1,644500×10 ⁻¹	34
4828	5,293490×10 ⁻²	2,216600×10 ⁻¹	1,637500×10 ⁻¹	34
5130	5,491180×10 ⁻²	2,227200×10 ⁻¹	1,629200×10 ⁻¹	34
5476	9,824540×10 ⁻²	2,389300×10 ⁻¹	1,483600×10 ⁻¹	34
88181410	7,307780×10 ⁻²	2,659600×10 ⁻¹	1,362000×10 ⁻¹	34
88191602	2,174600×10 ⁻¹	2,189900×10 ⁻¹	1,333500×10 ⁻¹	34
2223	7,393250×10 ⁻²	2,835900×10 ⁻¹	1,278500×10 ⁻¹	34
40350004	5,551710×10 ⁻²	2,853600×10 ⁻¹	1,272900×10 ⁻¹	34
88180813	1,353000×10 ⁻¹	2,759800×10 ⁻¹	1,255000×10 ⁻¹	34
2241	6,331600×10 ⁻²	2,929700×10 ⁻¹	1,239700×10 ⁻¹	34
6002	1,724500×10 ⁻¹	2,683600×10 ⁻¹	1,230000×10 ⁻¹	34
88192301	8,331460×10 ⁻²	2,981600×10 ⁻¹	1,214500×10 ⁻¹	34
3708	2,174100×10 ⁻¹	2,654700×10 ⁻¹	1,171100×10 ⁻¹	34
88190103	1,383900×10 ⁻¹	3,006200×10 ⁻¹	1,162400×10 ⁻¹	34
88181810	1,248200×10 ⁻¹	3,104200×10 ⁻¹	1,144900×10 ⁻¹	34
87171400	1,661600×10 ⁻¹	3,084000×10 ⁻¹	1,106500×10 ⁻¹	34
88191003	1,184300×10 ⁻¹	3,296100×10 ⁻¹	1,089100×10 ⁻¹	34
5119	1,935700×10 ⁻¹	3,044200×10 ⁻¹	1,086700×10 ⁻¹	34
88180512	2,171600×10 ⁻¹	2,968600×10 ⁻¹	1,079300×10 ⁻¹	34
88190703	1,325300×10 ⁻¹	3,294100×10 ⁻¹	1,078800×10 ⁻¹	34
1172	1,178100×10 ⁻¹	3,436400×10 ⁻¹	1,046900×10 ⁻¹	34
31040004	1,007800×10 ⁻¹	3,769800×10 ⁻¹	9,614220×10 ⁻²	34
4715	1,572100×10 ⁻¹	3,739900×10 ⁻¹	9,453910×10 ⁻²	34
4832	2,347900×10 ⁻¹	3,473200×10 ⁻¹	9,399910×10 ⁻²	34
90221206	2,372900×10 ⁻¹	4,004800×10 ⁻¹	8,377690×10 ⁻²	34
1873	6,303730×10 ⁻²	4,416100×10 ⁻¹	8,205510×10 ⁻²	34
88180701	2,256900×10 ⁻¹	4,698200×10 ⁻¹	7,394110×10 ⁻²	34
41010004	1,736500×10 ⁻¹	4,898900×10 ⁻¹	7,333020×10 ⁻²	34

Πίνακας Γ.2 (συνέχεια)

N	R ₁	R ₂	ρ ₀	r _{opt}
617	2,613400×10 ⁻¹	4,619700×10 ⁻¹	7,324830×10 ⁻²	34
88181510	1,879700×10 ⁻¹	5,021700×10 ⁻¹	7,132770×10 ⁻²	34
88182511	2,228500×10 ⁻¹	5,151500×10 ⁻¹	6,839150×10 ⁻²	34
5648	2,483200×10 ⁻¹	5,119400×10 ⁻¹	6,776230×10 ⁻²	34
88191203	2,284500×10 ⁻¹	5,581600×10 ⁻¹	6,354580×10 ⁻²	34
5637	2,749200×10 ⁻¹	5,709900×10 ⁻¹	6,081990×10 ⁻²	34
90202212	2,078400×10 ⁻¹	6,032100×10 ⁻¹	5,963150×10 ⁻²	34
2895	1,843700×10 ⁻¹	6,294600×10 ⁻¹	5,746530×10 ⁻²	34
5120	2,533600×10 ⁻¹	6,210100×10 ⁻¹	5,713580×10 ⁻²	34
3451	2,285800×10 ⁻¹	6,288900×10 ⁻¹	5,705220×10 ⁻²	34
4791	1,298900×10 ⁻¹	6,811600×10 ⁻¹	5,332690×10 ⁻²	34
4709	1,737100×10 ⁻¹	6,851900×10 ⁻¹	5,294080×10 ⁻²	34
3317	3,085000×10 ⁻¹	7,051000×10 ⁻¹	4,989590×10 ⁻²	34
4867	2,331200×10 ⁻¹	7,362600×10 ⁻¹	4,901550×10 ⁻²	34
1867	2,169200×10 ⁻¹	7,582500×10 ⁻¹	4,773260×10 ⁻²	34
88172500	2,429700×10 ⁻¹	9,020800×10 ⁻¹	4,017310×10 ⁻²	34
1208	3,619200×10 ⁻¹	9,975700×10 ⁻¹	3,597040×10 ⁻²	34
2363	2,937300×10 ⁻¹	1,012520	3,573360×10 ⁻²	34

Πίνακας Γ.2 : Στοιχεία για την περιοχή της πρακτικής ευστάθειας των γνωστών Τρωικών αστεροειδών. Στην πρώτη στήλη δίνουμε τον αριθμό καταλόγου (N) του αστεροειδή. Οι ποσότητες R₁, R₂, που εμφανίζονται στον ορισμό της νόρμας (Σχέση Γ.5.22) υπολογίζονται για κάθε αστεροειδή σύμφωνα με τη σχέση (Γ.6.11). Στην τέταρτη στήλη σημειώνουμε την τιμή της παραμέτρου ρ₀, η οποία μας εξασφαλίζει την ευστάθεια για χρόνο ίσο με την ηλικία του σύμπαντος. Η βέλτιστη τάξη (r_{opt}) ανάπτυξης των δυναμοσειρών, για την οποία έχουμε ευστάθεια για το παραπάνω χρονικό διάστημα, σημειώνεται στην τελευταία στήλη. Ο αστεροειδής βρίσκεται εντός της περιοχής πρακτικής ευστάθειας όταν ρ₀ > 1. Τα στοιχεία αναγράφονται με φθίνουσα σειρά ως προς την τιμή της παραμέτρου ρ₀.

Το ίδιο συμβαίνει και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό συντεταγμένων (Σχέση Γ.6.5) καθώς και για το μετασχηματισμό οποιασδήποτε άλλης συνάρτησης, όπως για παράδειγμα των συναρτήσεων I_j (Σχέση Γ.2.1) και I'_j (Σχέση Γ.5.4), j=1,2. Επειδή όμως πρακτικά χρησιμοποιούμε πεπερασμένες σειρές (μέχρι τάξη \tilde{r}), οι σταθερές a, b προσδιορίζονται από τις σχέσεις :

$$b = \| X_3 \|_R , \quad a = \max_{3 \leq s \leq \tilde{r}} \left(\frac{\| X_s \|_R}{\| X_3 \|_R} \right)^{\frac{1}{s-3}} \quad (\Gamma.6.14),$$

αφού προηγουμένως υπολογίσουμε αριθμητικά τις νόρμες που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις. Συγκεκριμένα έχουμε :

$$a \approx 14,164 , \quad b \approx 6,526 \quad (\Gamma.6.15),$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης (Σχέση Γ.6.13) είναι :

$$\rho \approx 1,744 \times 10^{-2} \quad (\Gamma.6.16).$$

Η τιμή αυτή είναι 1,67 φορές μικρότερη της τιμής της παραμέτρου ρ_0 (Σχέση Γ.6.4). Τονίζουμε όμως ότι η εκτίμηση (Γ.6.13) για την ακτίνα σύγκλισης, είναι καθαρά αναλυτική, επομένως είναι πιθανότατα αρκετά πεσιμιστική.

Μπορούμε όμως να εκτιμήσουμε την ακτίνα σύγκλισης των διαφόρων σειρών αριθμητικά, αφού έχουμε τα αναπτύγματά τους μέχρι όρους τάξης $\tilde{r} = 35$. Για παράδειγμα για τα αναπτύγματα των συναρτήσεων $T_X^{-1} I_j$, $j=1,2$ (Σχέση Γ.6.7), γνωρίζουμε τις νόρμες των όρων $\Phi_j^{(s)}$, $j=1,2$, $3 \leq s \leq 35$ (Πίνακας Γ.1). Μπορούμε επομένως να προσεγγίσουμε αριθμητικά αυτές τις τιμές με μια γεωμετρική πρόοδο, υπολογίζοντας θετικές σταθερές c και d τέτοιες ώστε :

$$\left\| \Phi_j^{(s)} \right\|_R \leq c \cdot d^{s-3}, \quad 3 \leq s \leq 35, \quad j=1,2 \quad (\Gamma.6.17).$$

Παρόμοια διαδικασία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Στον Πίνακα Γ.3 αναφέρονται οι τιμές των σταθερών c και d που βρίσκουμε για μερικές συναρτήσεις. Στη χειρότερη περίπτωση έχουμε :

$$d \cong 15,123 \quad (\Gamma.6.18).$$

Η ακτίνα σύγκλισης που αντιστοιχεί σ' αυτήν την τιμή είναι :

$$\rho = d^{-1} \cong 6,612 \times 10^{-2} \quad (\Gamma.6.19).$$

Θεωρώντας αυτήν την τιμή ως μια καλή εκτίμηση της πραγματικής ακτίνας σύγκλισης των διαφόρων δυναμοσειρών, βλέπουμε ότι η τιμή της παραμέτρου ρ_0 (Σχέση Γ.6.4) είναι περίπου 2,2 φορές μικρότερη της ακτίνας σύγκλισης. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλοι οι υπολογισμοί μας έχουν γίνει σίγουρα εντός της περιοχής σύγκλισης των διαφόρων δυναμοσειρών.

	c	d
X	6,526	14,164
$T_X x_1$	1,0	14,693
$T_X x_2$	1,0	14,890
$T_X y_1$	1,0	14,782
$T_X y_2$	1,0	15,123
$T_X^{-1} I_1$	0,5	13,522
$T_X^{-1} I_2$	0,5	14,047

Πίνακας Γ.3 : Οι τιμές των σταθερών c , d της γεωμετρικής προόδου με λόγο d και πρώτο όρο c , που προσεγγίζει καλύτερα τις νόρμες των όρων τάξης $s \leq 35$ των συναρτήσεων που αναγράφονται στην πρώτη στήλη του πίνακα.

Επομένως ο παράγοντας 2 που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του υπολοίπου (Σχέση Γ.5.27) είναι αρκετός, αφού η ακτίνα της περιοχής πρακτικής ευστάθειας ρ_0 είναι μικρότερη από το μισό της ακτίνας σύγκλισης ρ (Σχέση Γ.6.19). Ακόμα όμως και αν χρησιμοποιούσαμε ένα μεγαλύτερο παράγοντα, όπως για παράδειγμα 10 ή 100, ώστε οι υπολογισμοί μας να γίνονται σίγουρα εντός της περιοχής σύγκλισης, η τιμή της ακτίνας ρ_0 δεν αλλάζει ουσιαστικά. Συγκεκριμένα η καμπύλη του σχήματος Γ.2a μετατοπίζεται

ελάχιστα προς μικρότερες τιμές του χρόνου διαφυγής. Επειδή όμως η κλίση της καμπύλης στην περιοχή $\rho_0 \approx 2,911 \times 10^{-2}$ είναι πολύ μεγάλη, η νέα τιμή της παραμέτρου ρ_0 που θα αντιστοιχεί στην ηλικία του σύμπαντος μεταβάλλεται λίγο. Για παράδειγμα θέτοντας 100 στη θέση του παράγοντα 2 η τιμή της ακτίνας ρ_0 ελαττώνεται μόνο κατά 13%.

Γ.7. Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.

Εξετάσαμε το πρόβλημα της πρακτικής ευστάθειας στο επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, στηριζόμενοι στις ιδέες της θεωρίας του Nekhoroshev. Συγκεκριμένα βρήκαμε μια περιοχή στο χώρο φάσεων του συστήματος, γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας L_4 , τέτοια ώστε οι τροχιές με αρχικές συνθήκες εντός αυτής της περιοχής να παραμένουν αρκετά κοντά στο σημείο L_4 για χρόνο τουλάχιστον ίσο με την ηλικία του σύμπαντος. Έτσι, παρότι δεν αποδεικνύουμε την ευστάθεια αυτών των τροχιών με την κλασική έννοια, αφού δεν εξετάζουμε τη συμπεριφορά τους για άπειρο χρόνο, είμαστε σε θέση να εγγυηθούμε τον περιορισμό τους σε μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας για ένα πρακτικά σημαντικό χρονικό διάστημα ίσο με την ηλικία του σύμπαντος.

Για να ελέγξουμε τη φυσική σημασία των υπολογισμών μας εφαρμόσαμε τη μελέτη μας σε ένα συγκεκριμένο πραγματικό φυσικό σύστημα, το σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή, εξετάζοντας αν οι πραγματικοί Τροικοί αστεροειδείς που βρίσκονται γύρω από το σημείο L_4 , είναι εντός της περιοχής πρακτικής ευστάθειας που υπολογίσαμε. Πράγματι είδαμε ότι τέσσερις αστεροειδείς βρίσκονται μέσα στην περιοχή ευστάθειας, ενώ οι περισσότεροι βρίσκονται λίγο μόνο έξω από αυτή. Συμπερασματικά λοιπόν το πιο ενδιαφέρον στοιχείο της μελέτης μας, είναι ότι για πρώτη φορά κατορθώσαμε να εξασφαλίσουμε την πρακτική ευστάθεια του συστήματος για μια περιοχή ρεαλιστικού μεγέθους με πραγματικό φυσικό νόημα.

Από τεχνική άποψη αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα συνδυάζοντας αναλυτικές μεθόδους και αριθμητικούς υπολογισμούς, εργαζόμενοι με αναπτύγματα συναρτήσεων σε δυναμοσειρές μέχρι όρους τάξης $\tilde{r} = 35$. Κατασκευάσαμε έναν κατάλληλο κανονικό μετασχηματισμό, έτσι ώστε η Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος να βρίσκεται σε κανονική μορφή μέχρι τάξη $\tilde{r} = 35$. Υπολογίσαμε στη συνέχεια κάποια προσεγγιστικά ολοκληρώματα του συστήματος, η χρονική μεταβολή των οποίων, ήταν μικρή για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Απαιτώντας αυτά τα χρονικά διαστήματα να είναι της τάξης της ηλικίας του σύμπαντος, καταφέρνουμε τελικά να εκτιμήσουμε την ακτίνα της περιοχής πρακτικής ευστάθειας.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι αρκετά γενική, οπότε μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα Χαμιλτονιανά συστήματα, ανεξάρτητα του πλήθους των βαθμών ελευθερίας τους. Το μόνο που χρειάζεται είναι να αναπτυχθεί η Χαμιλτονιανή γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας ώστε να έρθει στη μορφή (Γ.1.1).

Τα βασικά συμπεράσματα της μελέτης μας είναι τα ακόλουθα :

1. Κατορθώσαμε να βελτιώσουμε κατά πολύ την εκτίμηση του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας, σε σχέση με προγενέστερους υπολογισμούς, που είχαν γίνει από διάφορους ερευνητές (Simó 1989, Giorgilli et al. 1989, Celletti & Giorgilli 1991). Αυτό γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι η ακτίνα ρ_0 της περιοχής ευστάθειας που υπολογίσαμε, είναι περίπου $\rho_0 \approx 0,127 \cdot \rho_J$, όπου ρ_J η απόσταση του Δία από το σημείο L_4 , ενώ οι καλύτεροι προϋπάρχοντες υπολογισμοί έδιναν $\rho_0 \approx 4,206 \times 10^{-5} \cdot \rho_J$. Το πραγματικό μέγεθος της περιοχής πρακτικής ευστάθειας είναι ρεαλιστικό και έχει

πρακτικό φυσικό νόημα, αφού τέσσερις πραγματικοί αστεροειδείς βρίσκονται μέσα στην περιοχή ευστάθειας. Από τους υπόλοιπους αστεροειδείς που εξετάσαμε, οι περισσότεροι βρίσκονται σε μια περιοχή, η ακτίνα της οποίας είναι περίπου 10 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα r_0 . Επομένως μια σχετικά μικρή βελτίωση των υπολογισμών μας θα ήταν αρκετή για να εξασφαλίσει την πρακτική ευστάθεια της πλειοψηφίας των πραγματικών αστεροειδών. Επιπροσθέτως η απόσταση του αστεροειδή που βρίσκεται μακρύτερα, εκτός της περιοχής ευστάθειας, είναι περίπου 30 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα r_0 . Ακόμα και αυτό το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό, αν αναλογιστεί κανείς ότι σε προηγούμενες μελέτες, όχι μόνο δεν είχε εξασφαλιστεί η πρακτική ευστάθεια κανενός πραγματικού αστεροειδή, αλλά ο πιο απομακρυσμένος αστεροειδής βρισκόταν σε απόσταση 9.000 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της περιοχής πρακτικής ευστάθειας. Επομένως έχουμε βελτίωση των προγενέστερων αποτελεσμάτων κατά έναν παράγοντα περίπου ίσο με 300. Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μέθοδος μας είναι ιδιαιτέρως επιτυχής, αν και το βασικό της στοιχείο είναι το ίδιο όπως και στις προγενέστερες μελέτες, δηλαδή η θεωρία του Nekhoroshev. Η θεαματική βελτίωση των αποτελεσμάτων οφείλεται σε ορισμένα στοιχεία, τα οποία θα αναφερθούν στη συνέχεια.

2. Στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιούμε πολύ συχνά εκτιμήσεις της μέγιστης τιμής κάποιας συνάρτησης η οποία δίνεται υπό μορφή δυναμοσειράς. Στην πραγματικότητα βρίσκουμε άνω φράγματα για τους όρους κάθε τάξης της δυναμοσειράς, τα οποία μας επιτρέπουν την εκτίμηση ενός άνω φράγματος για όλη τη δυναμοσειρά, όταν οι μεταβλητές της βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου φάσεων. Σε προγενέστερες εργασίες οι εκτιμήσεις αυτών των φραγμάτων ήταν κυρίως αναλυτικές. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύοταν αυστηρά η σύγκλιση των διαφόρων δυναμοσειρών σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου φάσεων, αλλά υπερεκτιμούνταν κατά πολύ τα άνω φράγματα. Αντιθέτως στην παρούσα μελέτη υπολογίσαμε αριθμητικά τα άνω φράγματα των διαφόρων δυναμοσειρών, χρησιμοποιώντας μια καταλληλη νόρμα και βρήκαμε τις περιοχές σύγκλισης κάθε δυναμοσειράς κάνοντας διάφορες αριθμητικές εκτιμήσεις. Με αυτόν τον τρόπο θυσίασμε τη μαθηματική αυστηρότητα, αλλά από την άλλη μεριά τα αριθμητικά φράγματα που υπολογίσαμε είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα, επιτρέποντας μας έτσι να κάνουμε καλύτερες εκτιμήσεις των μέγιστων τιμών των διαφόρων συναρτήσεων.
3. Οι βασικές αλλαγές στη διαδικασία της εκτίμησης του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας, που κάναμε σε σχέση με προηγούμενες εργασίες είναι οι εξής:
 - Επιλέξαμε για τη μελέτη του συστήματος μας ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο περιγράφουμε καλύτερα την περιοχή ευστάθειας γύρω από το σημείο L_4 . Πρακτικά, αντί ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούσαν οι περισσότεροι ερευνητές, εργαστήκαμε σ' ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων, το οποίο είναι καταλληλότερο για την περιγραφή της περιοχής ευστάθειας γύρω από το σημείο L_4 . Υπενθυμίζουμε ότι η περιοχή ευστάθειας έχει σχήμα "μπανάνας" και βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο τον Ήλιο και ακτίνα περίπου ίση με την απόσταση Ήλιου - Δία. Αυτή η επιλογή αποτελεί και το σημαντικότερο παράγοντα βελτίωσης των αποτελεσμάτων μας.
 - Χρησιμοποιήσαμε μια καταλληλότερη νόρμα στην προσπάθεια υπολογισμού της μέγιστης τιμής των συναρτήσεων που έχουν μορφή δυναμοσειράς. Επειδή η περιοχή πρακτικής ευστάθειας ορίζεται ως ένωση κυκλικών περιοχών των επιπέδων που ορίζουν οι συζυγείς μεταβλητές (x_1, y_1 και x_2, y_2), μετασχηματίζουμε τις συναρτήσεις σε κατάλληλες πολικές συντεταγμένες, στις οποίες υπολογίζουμε τη νόρμα. Λεπτομερής ανάπτυξη του θέματος έγινε στην παράγραφο Γ.5.
 - Αναπτύξαμε τις διάφορες συναρτήσεις σε δυναμοσειρές, η μέγιστη τάξη των οποίων ήταν μεγαλύτερη από ότι σε προηγούμενες μελέτες. Συγκεκριμένα υπολογίσαμε

αναπτύγματα μέχρι και την τάξη $\tilde{r} = 35$, ενώ για παράδειγμα οι Celletti & Giorgilli (1991) είχαν κάνει αναπτύγματα μέχρι και την τάξη $r = 22$. Με αυτόν τον τρόπο πλησιάσαμε περισσότερο την πραγματική βέλτιστη τάξη ανάπτυξης των δυναμοσειρών, για την οποία παίρνουμε τις καλύτερες δυνατές εκτιμήσεις για το μέγεθος της περιοχής πρακτικής ευστάθειας. Βέβαια η πραγματική βέλτιστη τάξη μπορεί να είναι υψηλότερη από $\tilde{r} = 35$, οπότε είναι πρακτικά αδύνατο να τη φτάσουμε αριθμητικά, αλλά όσο την πλησιάζουμε τόσο τα αποτελέσματά μας βελτιώνονται. Για να μπορέσουμε όμως να φτάσουμε σε μεγαλύτερες τάξεις ανάπτυξης τις διάφορες συναρτήσεις, αναγκαστήκαμε να μειώσουμε τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, έτσι ώστε να μελετήσουμε συναρτήσεις με όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές. Έτσι αντί να μελετήσουμε το χωρικό πρόβλημα των τριών σωμάτων, το οποίο έχει 3 βαθμούς ελευθερίας περιοριστήκαμε στη μελέτη του επίπεδου προβλήματος των 2 βαθμών ελευθερίας. Από τα στοιχεία του Πίνακα Γ.2 βλέπουμε ότι για μερικούς αστεροειδείς η βέλτιστη τάξη είναι μικρότερη από 34. Αυτό αποτελεί μια ένδειξη ότι κάνοντας αναπτύγματα στη γενική περίπτωση μέχρι και την τάξη $\tilde{r} = 35$, είμαστε σχετικά κοντά στην πραγματική βέλτιστη τάξη.

4. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, εξετάσαμε την ύπαρξη της περιοχής πρακτικής ευστάθειας στο διδιάστατο πρόβλημα των τριών σωμάτων και όχι στο γενικότερο χωρικό πρόβλημα, το οποίο είναι τριών διαστάσεων. Αυτός ο περιορισμός έγινε κυρίως για πρακτικούς λόγους, έτσι ώστε οι χρόνοι υπολογισμού να μη γίνονται απαγορευτικοί, οι συναρτήσεις τις οποίες χρησιμοποιούμε να μην έχουν ένα τεράστιο πλήθος συντελεστών, τους οποίους δύσκολα θα αποθηκεύαμε και θα ανακαλούσαμε από τη μνήμη του υπολογιστή και για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε αναπτύγματα σειρών μέχρι όσο το δυνατόν υψηλότερη τάξη. Ένας όμως από τους πιθανούς λόγους που οδηγεί τις τροχιές μακριά από τη γειτονιά του σημείου ισορροπίας είναι η διάχυση Arnold, η οποία εμφανίζεται μόνο στο τρισδιάστατο σύστημα. Επομένως μελετώντας το διδιάστατο μοντέλο δε λαμβάνουμε υπ' όψη μας αυτόν τον πιθανό παράγοντα αστάθειας. Παρόλα αυτά όμως η βελτίωση στις εκτιμήσεις του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας είναι τόσο μεγάλη, ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαδικασία μελέτης του προβλήματος που ακολουθήσαμε ιδιαιτέρως επιτυχή. Άλλωστε η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και στο σύστημα των τριών βαθμών ελευθερίας. Γενικότερα τη μέθοδο που εφαρμόσαμε στο σύστημα των τριών σωμάτων, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός Χαμιλτονιανού συστήματος γύρω από την περιοχή ενός σημείου ευσταθούς ισορροπίας, ανεξαρτήτως των βαθμών ελευθερίας του συστήματος αρκεί να δώσουμε στη Χαμιλτονιανή τη μορφή της σχέσης (Γ.1.1).
5. Η περιοχή πρακτικής ευστάθειας βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης των διαφόρων δυναμοσειρών. Στην προσπάθεια εκτίμησης της ακτίνας r_0 της περιοχής πρακτικής ευστάθειας κάναμε αρκετές αριθμητικές προσεγγίσεις, η εγκυρότητα των οποίων εξασφαλίζεται μόνο αν η ακτίνα r_0 είναι μικρότερη από το μισό της ακτίνας σύγκλισης των διαφόρων σειρών. Χρησιμοποιώντας διάφορα αριθμητικά κριτήρια εκτιμήσαμε την ακτίνα της μικρότερης δυνατής περιοχής σύγκλισης, η οποία είναι τουλάχιστον 2,2 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα r_0 . Επομένως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι προσεγγίσεις που κάναμε και τα αποτελέσματα στο οποία καταλήξαμε είναι ασφαλή.
6. Η μελέτη μας αποτελεί μια ακόμα επιβεβαίωση της σπουδαιότητας της θεωρίας του Nekhoroshev και αυτό γιατί πέρα από τη μαθηματική σημασία που αυτή έχει, βλέπουμε ότι μπορεί να μας οδηγήσει σε ρεαλιστικές εκτιμήσεις πάνω σε συγκεκριμένα φυσικά συστήματα. Σημειώνουμε ότι η βασική ιδέα αυτής της θεωρίας είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων για τη συμπεριφορά ενός συστήματος για ένα μεγάλο αλλά πεπερασμένο χρονικό διάστημα και όχι για άπειρο χρόνο. Μελετάμε έτσι την εξέλιξη

ενός συστήματος για ένα φυσικά αποδεκτό χρονικό διάστημα (για παράδειγμα η ηλικία του σύμπαντος).

Είδαμε λοιπόν ότι η μελέτη ενός απλού μοντέλου, το οποίο φιλοδοξεί να περιγράψει ως ένα βαθμό το πραγματικό ηλιακό σύστημα, μέσω της θεωρίας του Nekhoroshev και με την κατάλληλη χρήση αναλυτικών μεθόδων και αριθμητικών υπολογισμών οδηγεί σε ρεαλιστικά αποτελέσματα άμεσα εφαρμόσιμα στο πραγματικό σύστημα.

Μέρος Δ

Μελέτη μη κανονικών περιοδικών τροχιών
σε ένα χημικό δυναμικό σύστημα

Δ.1. Εισαγωγή.

Ένας βασικός τρόπος κατανόησης της συμπεριφοράς ενός μη ολοκληρώσιμου δυναμικού συστήματος είναι η μελέτη των περιοδικών του τροχιών. Αυτό συμβαίνει γιατί το είδος της ευστάθειας των περιοδικών τροχιών καθορίζει τη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος στις περιοχές του χώρου φάσεων, γύρω από τις τροχιές αυτές. Γνωρίζουμε ότι μια ευσταθής περιοδική τροχιά συγκεντρώνει γύρω της ένα σύνολο ημιπεριοδικών τροχιών, τα γενικά χαρακτηριστικά των οποίων είναι παρόμοια με αυτά της περιοδικής τροχιάς. Έτσι, για παράδειγμα, οι ευσταθείς περιοδικές τροχιές ενός γαλαξιακού δυναμικού συστήματος συγκεντρώνουν γύρω τους ύλη, ενώ η ύπαρξη ευσταθών περιοδικών τροχιών σ' ένα δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφει την κίνηση μιας δέσμης σωματιδίων σ' έναν επιταχυντή, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη περιοχών του χώρου φάσεων, στις οποίες η δέσμη δεν καταστρέφεται μετά από μερικές περιστροφές. Από την άλλη μεριά, οι ασταθείς περιοδικές τροχιές δημιουργούν γύρω τους περιοχές στοχαστικότητας. Η σπουδαιότητα των περιοδικών τροχιών γίνεται επίσης αντιληπτή από το γεγονός ότι οι περιοδικές τροχιές ενός κλασσικού δυναμικού συστήματος επηρεάζουν και την κβαντική συμπεριφορά του (Founargiotakis et al. 1989, Farantos et al. 1989, Contopoulos et al. 1994b). Επομένως η γνώση της θέσης και της ευστάθειας των περιοδικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος "χαρτογραφεί" κατά κάποιο τρόπο το χώρο φάσεων του.

Οι βασικές περιοδικές τροχιές ενός διαταραγμένου συστήματος είναι αυτές που προέρχονται, άμεσα ή μετά από διακλάδωση, από τις περιοδικές τροχιές του αδιατάρακτου, ολοκληρώσιμου συστήματος. Αντίθετα οι περιοδικές τροχιές του διαταραγμένου συστήματος που είναι ανεξάρτητες από τις βασικές περιοδικές τροχιές, ονομάζονται μη κανονικές περιοδικές τροχιές (irregular periodic orbits, Contopoulos 1970a, Barbanis 1986).

Πλήθος εργασιών αναφέρονται στη μελέτη των περιοδικών τροχιών και των διακλαδώσεων τους σε διαταραγμένα δυναμικά συστήματα δύο ή τριών βαθμών ελευθερίας, μερικές εκ των οποίων αναφέρονται στην παράγραφο A.2. Η γνώση μας για τη συμπεριφορά των Χαμιλτονιανών δυναμικών συστημάτων είναι σαφώς πληρέστερη για συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας παρά για συστήματα 3 βαθμών ελευθερίας. Η μελέτη τρισδιάστατων Χαμιλτονιανών συστημάτων είναι σημαντική, διότι τέτοια συστήματα εισάγουν ποιοτικά νέα φαινόμενα, τα οποία δεν παρατηρούνται σε Χαμιλτονιανά συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας. Ένα παράδειγμα είναι η εμφάνιση της μιγαδικής αστάθειας, η οποία, σε αντίθεση με τα άλλα είδη αστάθειας, όταν εμφανίζεται δεν ακολουθείται από διακλάδωση νέων περιοδικών τροχιών.

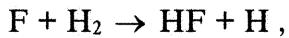
Πολλές φορές η μορφή της Χαμιλτονιανής συνάρτησης ενός τρισδιάστατου δυναμικού συστήματος επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε για κάποιες τιμές των παραμέτρων το πρόβλημα να ανάγεται ουσιαστικά σε ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να εξετάσουμε αν και πως, τα χαρακτηριστικά του διδιάστατου

συστήματος επηρεάζουν το τρισδιάστατο σύστημα. Ως παράδειγμα αναφέρουμε την τρισδιάστατη Χαμιλτονιανή της μορφής :

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot z^2) - \epsilon \cdot x \cdot z^2 - \eta \cdot y \cdot z^2 \quad (\Delta.1.1),$$

η οποία στις οριακές περιπτώσεις όπου $\epsilon = 0$ ή $\eta = 0$, αναλύεται σε ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας και έναν ανεξάρτητο μονοδιάστατο ταλαντωτή. Η Χαμιλτονιανή ($\Delta.1.1$) αποτέλεσε το αντικείμενο μελέτης πολλών εργασιών (Magnenat 1982a, Martinet & Magnenat 1981, Contopoulos 1984, 1985, 1986a, b, c, Contopoulos & Magnenat 1985).

Εμείς θα μελετήσουμε ένα Χαμιλτονιανό σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας, το οποίο περιγράφει τη χημική αντίδραση :



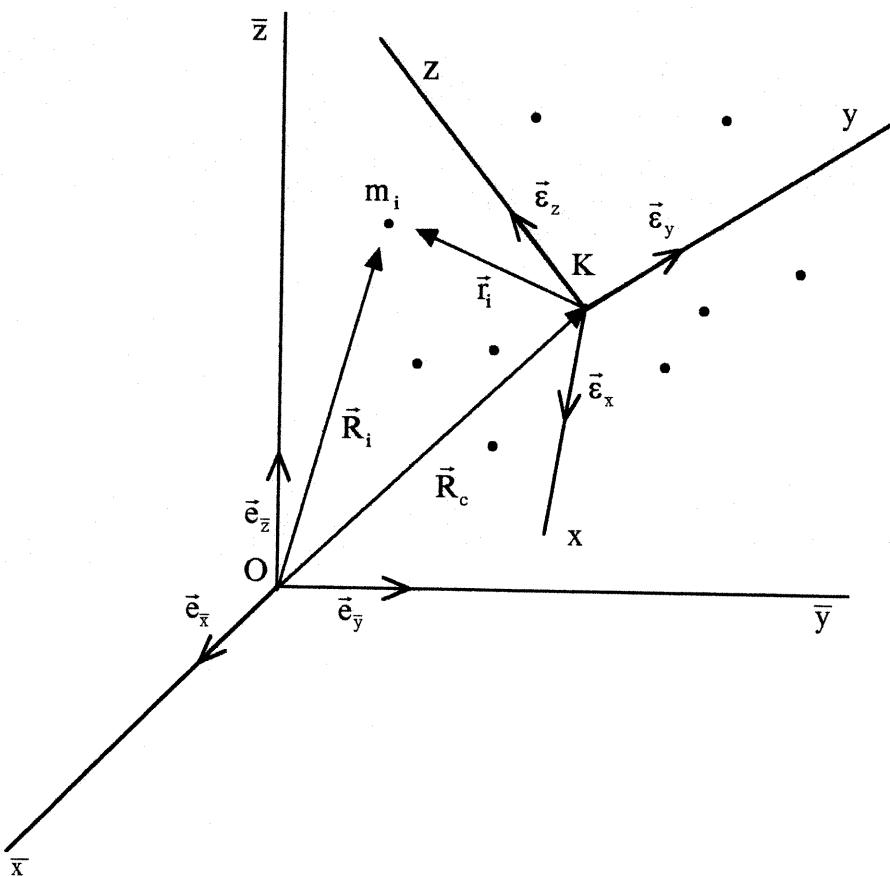
δηλαδή την αλληλεπίδραση τριών σωματιδίων, δύο ατόμων υδρογόνου (H) και ενός ατόμου φθορίου (F), οπότε συμβολικά αναφέρεται ως σύστημα FH_2 . Θα αναφερθούμε επίσης και στα ισοτοπικά ανάλογα αυτού του συστήματος, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου το ένα ή και τα δύο άτομα υδρογόνου αντικαθίστανται από άτομα δευτερίου (D). Παρότι το σύστημα είναι τρισδιάστατο, περιορίζεται ουσιαστικά σ' ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας για μια κατάλληλη επιλογή των αρχικών συνθηκών των τριών ατόμων (γραμμική διάταξη ατόμων). Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τη μελέτη μερικών μη κανονικών περιοδικών τροχιών ($\mu.\kappa.\pi.\tau.$) που εμφανίζονται σ' αυτήν την οριακή κατάσταση του συστήματος. Με αυτόν τον τρόπο, η γνώση που θα αποκτήσουμε για τη δυναμική συμπεριφορά του διδιάστατου περιορισμού του συστήματος, θα αποτελέσει τη βάση για μια μελλοντική μελέτη του καθαρά τρισδιάστατου προβλήματος. Θα μελετήσουμε αριθμητικά μια σειρά από $\mu.\kappa.\pi.\tau.$ οι οποίες παρουσιάζουν κάποιες μορφολογικές αναλογίες μεταξύ τους. Αυτές οι αναλογίες αντικατοπτρίζονται σε μερικές απλές σχέσεις που ισχύουν για τις αρχικές συνθήκες των $\mu.\kappa.\pi.\tau.$. Οι σχέσεις αυτές, μας επιτρέπουν τελικά την επιτυχή πρόβλεψη των αγνώστων εκ των προτέρων, τιμών των αρχικών συνθηκών μιας νέας $\mu.\kappa.\pi.\tau.$ της σειράς.

Στην παράγραφο $\Delta.2$ αναπτύσσουμε λεπτομερώς το θεωρητικό υπόβαθρο που χρειαζόμαστε για την περιγραφή της κίνησης N σωματιδίων στο σύστημα του κέντρου μάζας τους, υπό Χαμιλτονιανή μορφή. Η μορφή και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του χημικού δυναμικού που περιγράφει την αλληλεπίδραση των τριών ατόμων (σε όλα τα ισοτοπικά ανάλογα του συστήματος), για διάφορα συστήματα συντεταγμένων, εξετάζονται στην παράγραφο $\Delta.3$. Στην παράγραφο $\Delta.4$ εξαγάγουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος, βασιζόμενοι στη θεωρία που αναπτύχθηκε στην παράγραφο $\Delta.2$. Η αριθμητική μελέτη των περιοδικών τροχιών του περιορισμένου διδιάστατου συστήματος γίνεται στην παράγραφο $\Delta.5$. Αρχικά, στην παράγραφο $\Delta.5.1$ αναφερόμαστε στην επιφάνεια τομής Poincaré πάνω στην οποία εξετάζουμε τις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών, η οποία είναι μια υπερεπιφάνεια στο χώρο φάσεων, κατάλληλα επιλεγμένη ώστε να τέμνεται από όσο το δυνατόν περισσότερες τροχιές του συστήματος. Η επιλογή της συγκεκριμένης υπερεπιφάνειας επιβάλλεται από τη μορφολογία της συνάρτησης δυναμικού V του συστήματος. Στην παράγραφο $\Delta.5.2$ κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε διάφορες περιοδικές τροχιές του συστήματος FH_2 , ενώ η αριθμητική μελέτη της ομάδας των $\mu.\kappa.\pi.\tau.$ γίνεται στην παράγραφο $\Delta.5.3$. Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε τα μορφολογικά χαρακτηριστικά των $\mu.\kappa.\pi.\tau.$ και την εξέλιξη των τροχιών συναρτήσει της τιμής της ενέργειας E του συστήματος. Μελετώντας τις τιμές των αρχικών συνθηκών των τροχιών πάνω στην επιφάνεια τομής Poincaré για διάφορες τιμές της ενέργειας, καταλήγουμε σε ορισμένους εμπειρικούς νόμους, οι οποίοι μας επιτρέπουν τελικά την επιτυχή πρόβλεψη των αρχικών συνθηκών νέων $\mu.\kappa.\pi.\tau.$. Ανάλογη αριθμητική μελέτη του ισοτοπικού συστήματος FD_2 , για μια τιμή της ενέργειας, γίνεται στην παράγραφο $\Delta.5.4$.

Όλα τα αποτελέσματα συνοψίζονται στην παράγραφο Δ.6 όπου παρουσιάζονται και τα συμπεράσματα της μελέτης μας.

Δ.2. Χαμιλτονιανός φορμαλισμός στο σύστημα του κέντρου μάζας N σωματιδίων.

Θεωρούμε ένα σύστημα N σημειακών σωματιδίων. Εστω επίσης ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$, ακίνητο στο χώρο, το οποίο ονομάζουμε σταθερό σύστημα συντεταγμένων (Σ.Σ.Σ.) ή αδρανειακό (Σχήμα Δ.1).



Σχήμα Δ.1 : Το σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (Σ.Σ.Σ.) $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, και το σύστημα του κέντρου μάζας (Σ.Κ.Μ.) $Kxyz$, N σημειακών σωματιδίων, ως προς τα οποία εξετάζουμε την κίνηση των σωματιδίων.

Εστω $\vec{e}_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις ορθογώνιους άξονες. Κάθε σωματίδιο $i=1,2,\dots,N$ έχει συντεταγμένες $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ οπότε η θέση του στο Σ.Σ.Σ. καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης του, \vec{R}_i :

$$\vec{R}_i = \bar{x}_i \vec{e}_{\bar{x}} + \bar{y}_i \vec{e}_{\bar{y}} + \bar{z}_i \vec{e}_{\bar{z}}, \quad i=1,2,\dots,N \quad (\Delta.2.1).$$

Σε κάθε διάνυσμα θέσης \vec{R}_i αντιστοιχούμε έναν πίνακα γραμμή, τα στοιχεία του οποίου είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος :

$$\vec{R}_i \rightarrow \underline{R}_i \equiv (\bar{x}_i \bar{y}_i \bar{z}_i) \equiv (R_i^{\bar{x}} R_i^{\bar{y}} R_i^{\bar{z}}), \quad i=1,2,\dots,N \quad (\Delta.2.2).$$

Οι πίνακες που αντιστοιχούν στα μοναδιαία διανύσματα είναι :

$$\underline{\epsilon}_{\bar{x}} \equiv (1 \ 0 \ 0), \underline{\epsilon}_{\bar{y}} \equiv (0 \ 1 \ 0), \underline{\epsilon}_{\bar{z}} \equiv (0 \ 0 \ 1) \quad (\Delta.2.3).$$

Επίσης ορίζονται $\vec{\epsilon} \equiv (\vec{\epsilon}_{\bar{x}} \vec{\epsilon}_{\bar{y}} \vec{\epsilon}_{\bar{z}})$ η σχέση ($\Delta.2.1$) γράφεται :

$$\vec{R}_i = \underline{R}_i \cdot \vec{\epsilon}^T = \sum_{\bar{\alpha}} R_i^{\bar{\alpha}} \vec{\epsilon}_{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\alpha} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \quad (\Delta.2.4),$$

όπου το σύμβολο T δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα και $R_i^{\bar{\alpha}} = \underline{R}_i \cdot \underline{\epsilon}_{\bar{\alpha}}^T$.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \vec{R}, \vec{R}' , γράφεται :

$$\vec{R} \cdot \vec{R}' = \sum_{\bar{\alpha}} R^{\bar{\alpha}} R'^{\bar{\alpha}} = \underline{R} \cdot (\underline{R}')^T, \quad \bar{\alpha} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}.$$

Με βάση όλους τους παραπάνω ορισμούς η κινητική ενέργεια T του συστήματος των N σωματιδίων γράφεται ως εξής :

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i \underline{R}_i \cdot (\dot{\underline{R}}_i)^T = \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i \quad (\Delta.2.5),$$

όπου $\dot{A} \equiv \frac{dA}{dt}$.

Για την περιγραφή του συστήματος χρειαζόμαστε $3N$ συντεταγμένες $R_i^{\bar{\alpha}}$ όπου $\bar{\alpha} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ και $i=1,2,\dots,N$, επομένως το σύστημα έχει $3N$ βαθμούς ελευθερίας.

Έστω K x y z ένα δεύτερο δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων όπου K το κέντρο μάζας των N σωματιδίων (Σχήμα $\Delta.1$). Στο σύστημα του κέντρου μάζας ($\Sigma.K.M.$) ισχύουν ανάλογες σχέσεις με τις ($\Delta.2.1$) - ($\Delta.2.4$) που ορίσαμε στο $\Sigma.S.S.$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i \vec{\epsilon}_x + y_i \vec{\epsilon}_y + z_i \vec{\epsilon}_z \\ \underline{r}_i &\equiv (x_i \ y_i \ z_i) \equiv (r_i^x \ r_i^y \ r_i^z) \\ \underline{\epsilon}_x &\equiv (1 \ 0 \ 0), \underline{\epsilon}_y \equiv (0 \ 1 \ 0), \underline{\epsilon}_z \equiv (0 \ 0 \ 1) \\ \vec{\epsilon} &\equiv (\vec{\epsilon}_x \ \vec{\epsilon}_y \ \vec{\epsilon}_z) \\ \vec{r}_i &= \underline{r}_i \cdot \vec{\epsilon}^T = \sum_{\alpha} r_i^{\alpha} \vec{\epsilon}_{\alpha}, \quad \alpha = x, y, z \end{aligned} \quad (\Delta.2.6),$$

όπου $i=1,2,\dots,N$ και $\vec{\epsilon}_x, \vec{\epsilon}_y, \vec{\epsilon}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις άξονες.

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματιδίων, έχουμε τρεις ολόνομους δεσμούς :

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N m_i r_i^x = 0 \\ \sum_{i=1}^N m_i r_i^y = 0 \\ \sum_{i=1}^N m_i r_i^z = 0 \end{cases} \quad (\Delta.2.7).$$

Επομένως οι $3N$ συντεταγμένες r_i^α ($i=1,2,\dots,N$, $\alpha=x,y,z$) δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους οπότε χρειαζόμαστε $3N-3$ γενικευμένες συντεταγμένες για την περιγραφή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του. Από αυτές οι τρεις θα είναι οι γωνίες Euler θ, φ, ψ (στις οποίες θα αναφερθούμε αναλυτικά στη συνέχεια), οι οποίες καθορίζουν τη διεύθυνση των αξόνων του Σ.Κ.Μ. ως προς το Σ.Σ.Σ., αφού οι σχέσεις ($\Delta.2.7$) ορίζουν μόνο τη θέση της αρχής K του συστήματος K x y z και επομένως δεν το καθορίζουν πλήρως. Οι υπόλοιπες $3N-6$ γενικευμένες συντεταγμένες q_i , $i=1,2,\dots,3N-6$ θα καθορίζουν τη θέση των σωματιδίων ως προς το Σ.Κ.Μ. και θα δίνονται από σχέσεις της μορφής :

$$q_i = q_i(r_i^x, r_i^y, r_i^z, r_2^x, r_2^y, r_2^z, \dots, r_N^x, r_N^y, r_N^z), \quad i=1,2,\dots,3N-6 \quad (\Delta.2.8).$$

Γενικά θα μπορούσαμε να εκφράσουμε και τις συντεταγμένες r_i^α , $i=1,2,\dots,N$, $\alpha=x,y,z$, συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων q_i , $i=1,2,\dots,3N-6$:

$$r_i^\alpha = r_i^\alpha(q_1, q_2, \dots, q_{3N-6}), \quad i=1,2,\dots,N, \quad \alpha=x,y,z \quad (\Delta.2.9).$$

Για να βρούμε τη σχέση που συνδέει τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha}=\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ και \vec{e}_α , $\alpha=x,y,z$ των δύο συστημάτων παρατηρούμε ότι αυτά καθορίζουν μόνο διευθύνσεις στο χώρο, οπότε το γεγονός ότι και τα δύο συστήματα δεν έχουν την ίδια αρχή δεν παίζει κανένα ρόλο. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι οι αρχές των δύο συστημάτων ταυτίζονται, αφού μια παράλληλη μετατόπιση της αρχής K του Σ.Κ.Μ. ώστε το K να ταυτιστεί με το O , δεν αλλάζει τις διευθύνσεις που ορίζουν τα \vec{e}_α , $\alpha=x,y,z$ στο χώρο. Οι συνιστώσες των \vec{e}_α , $\alpha=x,y,z$ στο Σ.Σ.Σ. είναι τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζονται ανάμεσα στα \vec{e}_α και στα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha}=\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Έτσι ορίζονται τον πίνακα C με στοιχεία :

$$C_{\alpha\bar{\alpha}} \equiv \cos(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_{\bar{\alpha}}) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_{\bar{\alpha}}, \quad \alpha=x,y,z, \quad \bar{\alpha}=\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \quad (\Delta.2.10),$$

έχουμε :

$$\vec{e}_\alpha = \sum_{\bar{\alpha}} C_{\alpha\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}}, \quad \alpha=x,y,z, \quad \bar{\alpha}=\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \quad (\Delta.2.11)$$

ή υπό μορφή πινάκων :

$$\underline{\vec{e}} = \underline{\vec{e}} \cdot \underline{C}^T \quad (\Delta.2.12).$$

Αφού τα δύο συστήματα συντεταγμένων Σ.Σ.Σ. και Σ.Κ.Μ. είναι καρτεσιανά ο πίνακας μετασχηματισμού \underline{C} είναι ορθογώνιος, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση :

$$\underline{C}^{-1} = \underline{C}^T \quad (\Delta.2.13).$$

Επειδή τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφα η ορίζουσα του πίνακα \underline{C} ισούται με τη μονάδα :

$$|\underline{C}| = 1 \quad (\Delta.2.14).$$

Από τις σχέσεις (Δ.2.12) και (Δ.2.13), έχουμε :

$$\vec{\epsilon}_{\bar{\alpha}} = \sum_{\alpha} C_{\alpha\bar{\alpha}} \vec{\epsilon}_{\alpha}, \quad \alpha = x, y, z, \quad \bar{\alpha} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \quad (\Delta.2.15)$$

και υπό μορφή πινάκων :

$$\underline{\vec{\epsilon}} = \underline{\vec{\epsilon}} \cdot \underline{C} \quad (\Delta.2.16).$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τους ρυθμούς μεταβολής των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{\epsilon}_{\alpha}$, $\alpha = x, y, z$ καθώς το Σ.Κ.Μ. μετατοπίζεται από μια θέση σε μια άλλη. Μια τέτοια γενική μετατόπιση είναι ισοδύναμη με μια παράλληλη μετατόπιση του Σ.Κ.Μ. και μια στροφή γύρω από άξονα που περνά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (θεώρημα Chasle). Επειδή τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_{\alpha}$, $\alpha = x, y, z$ είναι μοναδιαία και καθορίζουν μόνο διευθύνσεις, η παράλληλη μετατόπιση της αρχής του Σ.Κ.Μ. δεν τα μεταβάλλει, οπότε ο ρυθμός μεταβολής τους $\frac{d\vec{\epsilon}_{\alpha}}{dt}$ εξαρτάται μόνο από τη στροφή του συστήματος, την οποία και θα μελετήσουμε. Θεωρούμε ότι η στροφή σε χρόνο dt είναι απειροστή, οπότε θα διαφέρει λίγο από την ταυτότητα, η οποία αντιπροσωπεύεται από το μοναδιαίο 3×3 πίνακα I_3 . Επομένως σε προσέγγιση πρώτης τάξης η απειροστή αυτή στροφή αντιπροσωπεύεται από τον ορθογώνιο πίνακα :

$$\underline{A} = I_3 + \underline{E} \quad (\Delta.2.17),$$

όπου ο \underline{E} είναι απειροστός πίνακας. Ο αντίστροφος του πίνακα \underline{A} , σε προσέγγιση πρώτης τάξης είναι :

$$\underline{A}^{-1} = I_3 - \underline{E} \quad (\Delta.2.18).$$

Επειδή ο πίνακας \underline{A} είναι ορθογώνιος, ικανοποιεί δηλαδή μια σχέση της μορφής (Δ.2.13), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Δ.2.17) και (Δ.2.18) έχουμε :

$$\underline{E} = - \underline{E}^T \quad (\Delta.2.19),$$

δηλαδή ο απειροστός πίνακας \underline{E} είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας 3×3 , έχει επομένως τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες και παίρνει τη μορφή :

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} 0 & d\phi_z & -d\phi_y \\ -d\phi_z & 0 & d\phi_x \\ d\phi_y & -d\phi_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.20),$$

όπου τα $d\phi_x$, $d\phi_y$, $d\phi_z$ είναι απειροστά. Έτσι ένα τυχαίο διάνυσμα \vec{r} μετά την απειροστή στροφή γίνεται \vec{r}' ως προς το αρχικό σύστημα. Υπό μορφή πινάκων έχουμε :

$$\underline{r}' = \underline{r} \cdot (\underline{I}_3 + \underline{E}) \quad (\Delta.2.21),$$

οπότε έχουμε :

$$d\underline{r} = \underline{r} \cdot \underline{E} \quad (\Delta.2.22).$$

Διαιρώντας με dt τη (Δ.2.22) και θέτοντας :

$$\omega_x = \frac{d\phi_x}{dt}, \omega_y = \frac{d\phi_y}{dt}, \omega_z = \frac{d\phi_z}{dt} \quad (\Delta.2.23),$$

έχουμε :

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r} \cdot \underline{\Omega} \quad (\Delta.2.24),$$

όπου :

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.25).$$

Αν για παράδειγμα στη σχέση (Δ.2.24) θεωρήσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\epsilon}_x$ στη θέση του \vec{r} έχουμε :

$$\frac{d\vec{\epsilon}_x}{dt} = \omega_z \vec{\epsilon}_y - \omega_y \vec{\epsilon}_z \quad (\Delta.2.26).$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ αντιστοιχεί στον πίνακα $\underline{\omega} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)$ στο Σ.Κ.Μ. και στον πίνακα $\underline{\omega}^\Sigma = (\omega_x^\Sigma \ \omega_y^\Sigma \ \omega_z^\Sigma)$ στο Σ.Σ.Σ.. Από τις σχέσεις (Δ.2.4) και (Δ.2.6) έχουμε :

$$\vec{\omega} = \underline{\omega} \cdot \vec{\epsilon}^T = \underline{\omega}^\Sigma \cdot \vec{\epsilon}^T \quad (\Delta.2.27).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Δ.2.12) και (Δ.2.16) οι (Δ.2.27) δίνουν :

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^\Sigma \cdot \underline{C}^T \text{ και } \underline{\omega}^\Sigma = \underline{\omega} \cdot \underline{C} \quad (\Delta.2.28).$$

Η σχέση (Δ.2.26) χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\vec{\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας γίνεται :

$$\vec{\dot{\varepsilon}}_x = \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_x \quad (\Delta.2.29)$$

ή γενικότερα :

$$\vec{\dot{\varepsilon}}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_\alpha , \quad \alpha = x, y, z \quad (\Delta.2.30).$$

Για να γράψουμε την παραπάνω σχέση υπό μορφή πινάκων σημειώνουμε αρχικά ότι σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ισχύει :

$$\vec{\varepsilon}_{\alpha'} \times \vec{\varepsilon}_\alpha = \sum_{\beta} \delta_{\alpha'\alpha\beta} \vec{\varepsilon}_\beta , \quad \alpha', \alpha, \beta = x, y, z \quad (\Delta.2.31),$$

όπου :

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν τα } i, j, k \text{ είναι άρτια μετάθεση των } x, y, z \\ -1 & \text{αν τα } i, j, k \text{ είναι περιττή μετάθεση των } x, y, z \\ 0 & \text{αν δύο τουλάχιστον δείκτες είναι ίδιοι} \end{cases} \quad (\Delta.2.32).$$

Έχουμε λοιπόν :

$$\vec{\dot{\varepsilon}}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_\alpha = \sum_{\alpha'} \omega_{\alpha'} \vec{\varepsilon}_{\alpha'} \times \vec{\varepsilon}_\alpha = \sum_{\alpha', \beta} \omega_{\alpha'} \delta_{\alpha'\alpha\beta} \vec{\varepsilon}_\beta .$$

Εμφανίζονται έτσι τα στοιχεία του πίνακα $\underline{\Omega}$ (Σχέση (Δ.2.25)) τα οποία μπορούν να δοθούν από τη σχέση :

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'} \delta_{\alpha'\alpha\beta} \omega_{\alpha'} = \sum_{\alpha'} \delta_{\alpha\beta\alpha'} \omega_{\alpha'} \quad (\Delta.2.33),$$

οπότε έχουμε, τελικά :

$$\vec{\dot{\varepsilon}}_\alpha = \sum_{\beta} \Omega_{\alpha\beta} \vec{\varepsilon}_\beta , \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (\Delta.2.34)$$

ή υπό μορφή πινάκων :

$$\vec{\dot{\varepsilon}} = (\vec{\dot{\varepsilon}}_x \ \vec{\dot{\varepsilon}}_y \ \vec{\dot{\varepsilon}}_z) = \vec{\varepsilon} \cdot \underline{\Omega}^T \quad (\Delta.2.35).$$

Παραγωγίζοντας τώρα τη σχέση (Δ.2.12) και χρησιμοποιώντας τη (Δ.2.16), έχουμε :

$$\vec{\dot{\varepsilon}} = \vec{\varepsilon} \cdot \underline{C}^T = \vec{\varepsilon} \cdot \underline{C} \cdot \underline{C}^T \quad (\Delta.2.36).$$

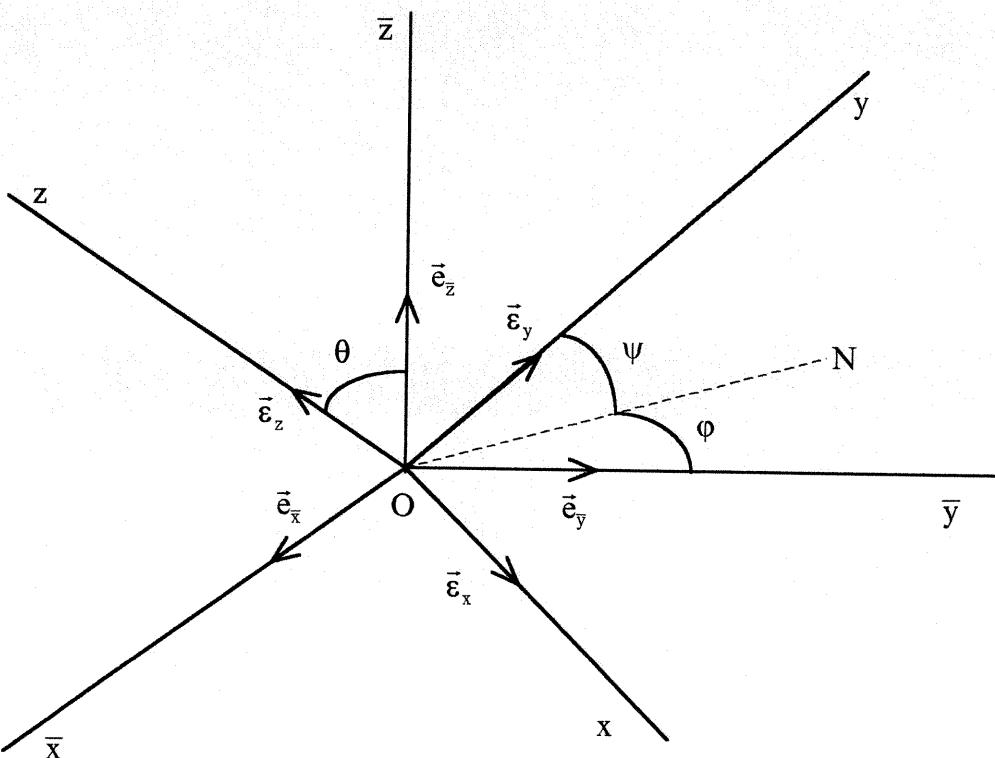
Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε αμέσως :

$$\underline{\Omega} = \underline{C} \cdot \underline{C}^T \quad (\Delta.2.37).$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση (Δ.2.33) μπορεί να αντιστραφεί οπότε έχουμε :

$$\omega_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha' \beta} \delta_{\alpha \alpha' \beta} \Omega_{\alpha' \beta}, \quad \alpha, \alpha', \beta = x, y, z \quad (\Delta.2.38).$$

Θα ασχοληθούμε τώρα με τις γωνίες Euler και θα βρούμε τις σχέσεις που τις συνδέουν με τα στοιχεία του πίνακα C καθώς και με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$. Οπως έχουμε αναφέρει οι γωνίες Euler καθορίζουν τις διευθύνσεις των αξόνων του Σ.Κ.Μ. ως προς το Σ.Σ.Σ., οπότε ξεχνώντας την παράλληλη μετατόπιση του Σ.Κ.Μ., εξετάζουμε μόνο τη στροφή του γύρω από άξονα, ο οποίος διέρχεται από την αρχή του, θεωρώντας ότι οι αρχές των δύο συστημάτων συμπίπτουν. Οι τρεις γωνίες Euler θ, ϕ, ψ καθορίζουν τη θέση του συστήματος Oxyz ως προς το Ο $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$, όπως φαίνεται στο σχήμα Δ.2. Η γωνία ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η τομή ON των επιπέδων Oyz και $O \bar{x} \bar{y}$ με τον άξονα $O\bar{y}$, η γωνία ψ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ON με τον άξονα Oy και η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας Oz με τον άξονα $O\bar{z}$. Σημειώνουμε ότι η γωνία ϕ βρίσκεται στο επίπεδο O $\bar{x}\bar{y}$ ενώ η γωνία ψ στο επίπεδο Oyz.



Σχήμα Δ.2 : Οι γωνίες του Euler.

Υποθέτουμε ότι τα δύο συστήματα $O \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ και $Oxyz$ αρχικά συμπίπτουν. Για να μετατοπιστεί το $Oxyz$ στην τελική του θέση, η οποία αντιστοιχεί στις γωνίες ϕ, θ, ψ εκτελούμε τρεις διαδοχικές στροφές (Σχήμα Δ.3). Αρχίζουμε με μια στροφή κατά γωνία ϕ περί του άξονα του \bar{e}_z η οποία φέρνει τα μοναδιαία διανύσματα στις θέσεις $\bar{e}_{x''}, \bar{e}_{y'}, \bar{e}_{z'}$. Σε αυτό το μετασχηματισμό αντιστοιχεί, σύμφωνα με τη (Δ.2.10) ο πίνακας :

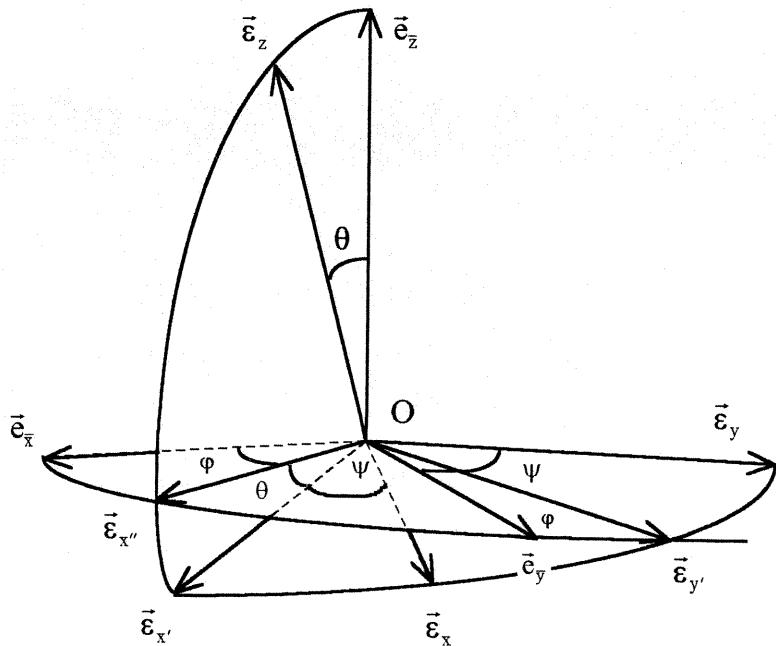
$$\underline{C}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.39).$$

Στη συνέχεια κάνουμε στροφή κατά γωνία θ περί τον áξονα του \vec{e}_y , φέρνοντας τα μοναδιαία διανύσματα στις θέσεις \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z . Ο πίνακας αυτού του μετασχηματισμού είναι:

$$\underline{C}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.40).$$

Τέλος κάνοντας στροφή κατά γωνία ψ περί τον áξονα του \vec{e}_z φέρνουμε τα μοναδιαία διανύσματα στις τελικές τους θέσεις \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z . Ο πίνακας του τελευταίου μετασχηματισμού είναι :

$$\underline{C}_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.41).$$



Σχήμα Δ.3 : Ανάλυση της στροφής του συστήματος $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ γύρω από ακίνητο σημείο O , σε τρεις στροφές :
α) στροφή γύρω από τον áξονα του διανύσματος \vec{e}_z , β) στροφή γύρω από τον áξονα του διανύσματος \vec{e}_y' και
γ) στροφή γύρω από τον áξονα του διανύσματος \vec{e}_z .

Ο τελικός μετασχηματισμός μεταξύ των $Oxyz$ και $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ είναι το γινόμενο των τριών μετασχηματισμών (Δ.2.39), (Δ.2.40) και (Δ.2.41). Επομένως για τον πίνακα \underline{C} ο οποίος ορίζεται στη σχέση (Δ.2.10) έχουμε :

$$\underline{C} = \underline{C}_3 \cdot \underline{C}_2 \cdot \underline{C}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi & \sin\phi \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi + \cos\phi \cdot \sin\psi & -\sin\theta \cdot \cos\psi \\ -\cos\phi \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi & -\sin\phi \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi + \cos\phi \cdot \cos\psi & \sin\theta \cdot \sin\psi \\ \cos\phi \cdot \sin\theta & \sin\phi \cdot \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.42).$$

Οι ρυθμοί μεταβολής $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ των γωνιών Euler καθορίζουν το διάνυσμα $\vec{\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας, οπότε, σύμφωνα με τη διαδικασία των τριών διαδοχικών στροφών που μόλις περιγράψαμε θα έχουμε :

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{\epsilon}_{\bar{z}} + \dot{\theta} \vec{\epsilon}_{y'} + \dot{\psi} \vec{\epsilon}_z \quad (\Delta.2.43).$$

Η σχέση (Δ.2.43) εκφράζει το διάνυσμα $\vec{\omega}$ ως προς τη βάση $(\vec{\epsilon}_{\bar{z}}, \vec{\epsilon}_{y'}, \vec{\epsilon}_z)$. Εκφράζοντας το $\vec{\omega}$ ως προς την βάση $(\vec{\epsilon}_x, \vec{\epsilon}_y, \vec{\epsilon}_z)$ του συστήματος $Oxyz$ έχουμε :

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\epsilon}_x + \omega_y \vec{\epsilon}_y + \omega_z \vec{\epsilon}_z \quad (\Delta.2.44),$$

οπότε οι συνιστώσες του $\vec{\omega}$ σ' αυτό το σύστημα συντεταγμένων θα δίνονται απ' τις σχέσεις:

$$\omega_x = \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_x, \quad \omega_y = \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_y, \quad \omega_z = \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_z \quad (\Delta.2.45).$$

Από τις (Δ.2.10), (Δ.2.42), (Δ.2.43), και (Δ.2.45) και το σχήμα Δ.3 έχουμε :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_x = \dot{\phi} (\vec{\epsilon}_{\bar{z}} \cdot \vec{\epsilon}_x) + \dot{\theta} (\vec{\epsilon}_{y'} \cdot \vec{\epsilon}_x) = \\ &= \dot{\phi} \cos(\vec{\epsilon}_x, \vec{\epsilon}_{\bar{z}}) + \dot{\theta} \cos(\vec{\epsilon}_{y'}, \vec{\epsilon}_x) = \dot{\phi} C_{13} + \dot{\theta} \sin\psi = \\ &= \dot{\theta} \sin\psi - \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi \\ \omega_y &= \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_y = \dot{\phi} (\vec{\epsilon}_{\bar{z}} \cdot \vec{\epsilon}_y) + \dot{\theta} (\vec{\epsilon}_{y'} \cdot \vec{\epsilon}_y) = \\ &= \dot{\phi} C_{23} + \dot{\theta} \cos\psi = \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi \\ \omega_z &= \vec{\omega} \cdot \vec{\epsilon}_z = \dot{\phi} (\vec{\epsilon}_{\bar{z}} \cdot \vec{\epsilon}_z) + \dot{\psi} = \dot{\phi} C_{33} + \dot{\psi} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \sin\psi - \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{aligned} \quad (\Delta.2.46).$$

Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο ή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Δ.2.28), (Δ.2.42) και (Δ.2.46) υπολογίζουμε τις συνιστώσες του $\vec{\omega}$ στο $\Sigma\Sigma\Sigma$:

$$\begin{aligned}\omega_x^\Sigma &= -\dot{\theta} \sin\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi \\ \omega_y^\Sigma &= \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi \\ \omega_z^\Sigma &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta\end{aligned}\quad (\Delta.2.47).$$

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε την κινητική ενέργεια T του συστήματος (Σχέση (Δ.2.5)) συναρτήσει των συντεταγμένων r_i^α $i=1,2,\dots,N$, $\alpha=x,y,z$, των σωματιδίων ως προς το Σ.Κ.Μ.. Από το σχήμα Δ.1 έχουμε :

$$\vec{R}_i = \vec{R}_c + \vec{r}_i, \quad i = 1,2,\dots,N \quad (\Delta.2.48).$$

Χρησιμοποιώντας τις (Δ.2.4), (Δ.2.6) και (Δ.2.12) η παραπάνω σχέση μας δίνει :

$$\begin{aligned}\underline{R}_i \cdot \underline{\dot{e}}^T &= \underline{R}_c \cdot \underline{\dot{e}}^T + \underline{r}_i \cdot \underline{\dot{e}}^T = \underline{R}_c \cdot \underline{\dot{e}}^T + \underline{r}_i \cdot \underline{C} \cdot \underline{\dot{e}}^T \Rightarrow \\ \underline{R}_i &= \underline{R}_c + \underline{r}_i \cdot \underline{C} \quad (\Delta.2.49).\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας τις (Δ.2.37) και (Δ.2.13) παίρνουμε :

$$\dot{\underline{R}}_i = \dot{\underline{R}}_c + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{C} + \underline{r}_i \cdot \dot{\underline{C}} = \dot{\underline{R}}_c + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{C} + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{C} \quad (\Delta.2.50).$$

Αντικαθιστώντας τη (Δ.2.50) στη (Δ.2.5) έχουμε :

$$\begin{aligned}2T &= \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\underline{R}}_c + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{C} + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{C}) \cdot (\dot{\underline{R}}_c + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{C} + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{C})^T = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\underline{R}}_c + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{C} + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{C}) \cdot (\dot{\underline{R}}_c^T + \underline{C}^T \cdot \dot{\underline{r}}_i^T + \underline{C}^T \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\underline{R}}_c \cdot \dot{\underline{R}}_c^T + \dot{\underline{R}}_c \cdot \underline{C}^T \cdot \dot{\underline{r}}_i^T + \dot{\underline{R}}_c \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{C} \cdot \dot{\underline{R}}_c^T + \\ &\quad + \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i^T + \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{C} \cdot \dot{\underline{R}}_c^T + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \dot{\underline{r}}_i^T + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T) = \\ &= M \dot{\underline{R}}_c \cdot \dot{\underline{R}}_c^T + \dot{\underline{R}}_c \cdot \underline{C}^T \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i^T \right) + \dot{\underline{R}}_c \cdot \underline{C}^T \cdot \underline{\Omega}^T \left(\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i^T \right) + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i \right) \underline{C} \cdot \dot{\underline{R}}_c^T + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i^T + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \right) \underline{\Omega} \cdot \underline{C} \cdot \dot{\underline{R}}_c^T + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \dot{\underline{r}}_i^T + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T\end{aligned}$$

όπου $M = \sum_{i=1}^N m_i$. Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια T ενός συστήματος N υλικών σημείων, όπως δίνεται από την παραπάνω σχέση, είναι άθροισμα δύο όρων : (1) του όρου $M \dot{\underline{R}}_c \cdot \dot{\underline{R}}_c^T$, που είναι η κινητική ενέργεια υλικού σημείου με μάζα ίση προς την ολική μάζα του συστήματος, που βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας και κινείται όπως αυτό, και (2) όλων των υπολοίπων όρων, οι οποίοι αποτελούν τη σχετική κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας. Από τη σχέση (Δ.2.7) έχουμε $\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i = 0$, από την οποία

παίρνουμε $\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i = 0$. Θέτοντας αυτές τις σχέσεις στο τελευταίο αποτέλεσμα και παραλείποντας τον όρο $M \dot{R}_c \cdot \dot{R}_c^T$ ο οποίος αναφέρεται στην κίνηση του κέντρου μάζας, αφού ενδιαφερόμαστε για τη σχετική κινητική ενέργεια του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας, έχουμε τελικά :

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i^T + \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \dot{r}_i^T + \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T \quad (\Delta.2.51).$$

Θα εξετάσουμε αρχικά το δεύτερο και τρίτο όρο της παραπάνω σχέσης :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T + \underline{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \dot{r}_i^T) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_k^3 \dot{r}_i^k (\underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T)_k + \sum_1^3 \dot{r}_i^1 (\underline{\Omega}^T \cdot \dot{r}_i^T)_1 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{kj}^3 \dot{r}_i^k \underline{\Omega}_{kj}^T \underline{r}_i^j + \sum_{lm}^3 \dot{r}_i^l \underline{\Omega}_{lm} \dot{r}_i^m \right) \stackrel{(\Delta.2.33)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(- \sum_{kjn}^3 \dot{r}_i^k \delta_{kjn} \omega_n \underline{r}_i^j + \sum_{lm\alpha}^3 \dot{r}_i^l \delta_{lm\alpha} \omega_\alpha \dot{r}_i^m \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{kjn}^3 \dot{r}_i^k \delta_{jkn} \omega_n \underline{r}_i^j + \sum_{lm\alpha}^3 \dot{r}_i^l \delta_{lm\alpha} \omega_\alpha \dot{r}_i^m \right) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N m_i \sum_{kjn}^3 \delta_{jkn} \omega_n \dot{r}_i^k \underline{r}_i^j \Rightarrow \\ A &= 2 \sum_n^3 \omega_n \sum_{kj}^3 \sum_i^N m_i \delta_{jkn} \underline{r}_i^j \dot{r}_i^k \end{aligned} \quad (\Delta.2.52).$$

Επίσης ισχύει ότι :

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_i = \sum_{kjn}^3 \vec{\epsilon}_n \delta_{nkj} \underline{r}_i^k \dot{r}_i^j$$

επομένως :

$$(\vec{r}_i \times \vec{r}_i) \cdot \vec{\epsilon}_n = \sum_{kj}^3 \delta_{nkj} \underline{r}_i^k \dot{r}_i^j = \sum_{kj}^3 \delta_{njk} \underline{r}_i^j \dot{r}_i^k = \sum_{kj}^3 \delta_{jkn} \underline{r}_i^j \dot{r}_i^k$$

οπότε η $(\Delta.2.52)$ γίνεται :

$$A = 2 \sum_n^3 \omega_n \sum_i^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{r}_i) \cdot \vec{\epsilon}_n = 2 \underline{\Lambda} \cdot \underline{\omega}^T \quad (\Delta.2.53),$$

όπου $\underline{\Lambda}$ ένας πίνακας 1×3 με στοιχεία :

$$\Lambda_\alpha = \sum_i^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{\dot{r}}_i) \cdot \vec{\varepsilon}_\alpha , \quad \alpha = x,y,z \quad (\Delta.2.54).$$

Εξετάζουμε τώρα τον τελευταίο όρο της σχέσης (Δ.2.51) :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T = \sum_i^N \sum_n^3 m_i r_i^n (\underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}^T \cdot \underline{r}_i^T)_n = \\ &= \sum_i^N \sum_{nj}^3 m_i r_i^n (\underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}^T)_{nj} r_i^j = \sum_i^N \sum_{njm}^3 m_i r_i^n \Omega_{nm} \Omega_{mj}^T r_i^j \stackrel{(\Delta.2.33)}{=} \\ &= - \sum_i^N m_i \sum_{njmk}^3 \delta_{nmk} \omega_k \delta_{mjl} \omega_l r_i^n r_i^j = \\ &= \sum_i^N m_i \sum_{njmk}^3 \delta_{mnk} \delta_{mjl} \omega_k \omega_l r_i^n r_i^j = \\ &= \sum_i^N m_i \sum_{njkl}^3 (\delta_{nj} \delta_{kl} - \delta_{nl} \delta_{kj}) \omega_k \omega_l r_i^n r_i^j = \\ &= \sum_{kl}^3 \sum_i^N m_i \left(\sum_{nj}^3 \delta_{nj} \delta_{kl} r_i^n r_i^j - \sum_{nj}^3 \delta_{nl} \delta_{kj} r_i^n r_i^j \right) \omega_k \omega_l = \\ &= \sum_{kl}^3 \omega_k \omega_l \left(\sum_i^N m_i \left[\left(\sum_n^3 r_i^n r_i^n \right) \delta_{kl} - r_i^k r_i^l \right] \right) = \\ &= \sum_{kl}^3 \omega_k \omega_l I_{kl} = \sum_k^3 \omega_k (\underline{I} \cdot \underline{\omega}^T)_k = \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T \Rightarrow \end{aligned}$$

$$B = \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T \quad (\Delta.2.55)^*.$$

Ο \underline{I} είναι ο τανυστής αδράνειας ο οποίος αντιστοιχεί σ' ένα συμμετρικό πίνακα 3×3 με στοιχεία :

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i^N m_i \left(\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i^T \delta_{\alpha\beta} - r_i^\alpha r_i^\beta \right) , \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (\Delta.2.56).$$

Επομένως από τις σχέσεις (Δ.2.51), (Δ.2.53) και (Δ.2.55) έχουμε για την κινητική ενέργεια T του συστήματος ως προς το Σ.Κ.Μ. :

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \cdot \underline{r}_i^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + 2 \underline{\Lambda} \cdot \underline{\omega}^T \quad (\Delta.2.57).$$

Στην παραπάνω σχέση η κινητική ενέργεια δεν εκφράζεται συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων q_i , $i=1,2,\dots,3N-6$, οι οποίες ορίζονται συναρτήσει των

* Στη διαδικασία απόδειξης της σχέσης (Δ.2.55) χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\sum_m \delta_{mnk} \delta_{mjl} = \delta_{nj} \delta_{kl} - \delta_{nl} \delta_{kj}$, όπου δ_{ij} το δέλτα του Kronecker, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$.

r_i^α , $i=1,2,\dots,N$, $\alpha=x,y,z$ σύμφωνα με τη σχέση (Δ.2.8). Παραγωγίζοντας τη σχέση (Δ.2.9) ως προς το χρόνο έχουμε :

$$\dot{r}_i^\alpha = \frac{dr_i^\alpha}{dt} = \sum_{k=1}^{3N-6} \frac{\partial r_i^\alpha}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^{3N-6} \frac{\partial r_i^\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad i=1,2,\dots,N, \quad \alpha=x,y,z \quad (\Delta.2.58).$$

Χρησιμοποιώντας τη (Δ.2.58) ο πρώτος όρος της (Δ.2.57) γίνεται :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i^T &= \sum_{i=1}^N m_i \sum_{\alpha} \dot{r}_i^\alpha \dot{r}_i^\alpha = \sum_{i=1}^N m_i \sum_{\alpha} \sum_{lk}^{3N-6} \frac{\partial r_i^\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \frac{\partial r_i^\alpha}{\partial q_l} \dot{q}_l = \\ &= \sum_{lk}^{3N-6} \dot{q}_k \dot{q}_l \sum_{i=1}^N m_i \sum_{\alpha} \frac{\partial r_i^\alpha}{\partial q_k} \frac{\partial r_i^\alpha}{\partial q_l} = \sum_{lk}^{3N-6} \dot{q}_k \dot{q}_l \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_l} \right)^T = \sum_{lk}^{3N-6} \dot{q}_k \dot{q}_l S_{kl} \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i^T &= \underline{\dot{q}} \cdot \underline{S} \cdot \underline{\dot{q}}^T \end{aligned} \quad (\Delta.2.59),$$

όπου $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_{3N-6})$ και $\underline{S} = \underline{S}(q)$ ένας πίνακας $(3N-6) \times (3N-6)$, τα στοιχεία του οποίου είναι συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων q_i , $i=1,2,\dots,3N-6$ και δίνονται απ' τη σχέση :

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \underline{r}_k}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \underline{r}_k}{\partial q_j} \right)^T, \quad i,j=1,2,\dots,3N-6 \quad (\Delta.2.60).$$

Είναι φανερό ότι ο πίνακας \underline{S} είναι συμμετρικός.

Ο τελευταίος όρος της σχέσης (Δ.2.57) γίνεται :

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda} \cdot \underline{\omega}^T &= \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times \vec{r}_i) \vec{\epsilon}_{\alpha} \omega_{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{3N-6} m_i (\vec{r}_i \times \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}) \dot{q}_k \vec{\epsilon}_{\alpha} \omega_{\alpha} = \sum_{k=1}^{3N-6} \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha k} \dot{q}_k \omega_{\alpha} \Rightarrow \\ \underline{\Lambda} \cdot \underline{\omega} &= \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{\dot{q}}^T \end{aligned} \quad (\Delta.2.61),$$

όπου Φ ένας πίνακας τάξης $3 \times (3N-6)$, τα στοιχεία του οποίου δίνονται απ' τη σχέση :

$$\Phi_{\alpha i} = \sum_k^N m_k (\vec{r}_k \times \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}) \vec{\epsilon}_{\alpha}, \quad i=1,2,\dots,3N-6, \quad \alpha=x,y,z \quad (\Delta.2.62).$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις (Δ.2.59) και (Δ.2.61) στη (Δ.2.57) έχουμε την κινητική ενέργεια ως συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων :

$$2T = \underline{\dot{q}} \cdot \underline{S} \cdot \underline{\dot{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + 2 \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{\dot{q}}^T \quad (\Delta.2.63).$$

Οι συζυγείς ορμές των γενικευμένων συντεταγμένων q_i , $i=1,2,\dots,3N-6$ ορίζονται απ' τη σχέση :

$$\underline{p} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}} = \dot{\underline{q}} \cdot \underline{S} + \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \quad (\Delta.2.64),$$

και οι γενικευμένες στροφορμές :

$$\underline{J} = (J_x \ J_y \ J_z) \equiv \frac{\partial T}{\partial \underline{\omega}} = \underline{\omega} \cdot \underline{I} + \dot{\underline{q}} \cdot \underline{\Phi}^T \quad (\Delta.2.65).$$

Θα μετασχηματίσουμε τώρα την κινητική ενέργεια T (Σχέση (Δ.2.63)) έτσι ώστε να έχει Χαμιλτονιανή μορφή. Δηλαδή θα την εκφράσουμε συναρτήσει γενικευμένων ορμών οι οποίες είναι συζυγείς μεταβλητές κάποιων γενικευμένων θέσεων. Για αυτές τις γενικευμένες συντεταγμένες θα ισχύουν οι εξισώσεις Hamilton. Από τις σχέσεις (Δ.2.64) και (Δ.2.65) έχουμε αντίστοιχα :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{q}} &= \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} - \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \\ \dot{\underline{q}}^T &= \underline{\Phi}^{-1} \cdot (\underline{J}^T - \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T) \end{aligned} \quad (\Delta.2.66),$$

οπότε η σχέση (Δ.2.63) γίνεται :

$$\begin{aligned} 2T &= (\underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} - \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1}) \cdot \underline{S} \cdot \dot{\underline{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + 2\underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \dot{\underline{q}}^T = \\ &= \underline{p} \cdot \dot{\underline{q}}^T - \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \dot{\underline{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + 2\underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \dot{\underline{q}}^T = \\ &= \underline{p} \cdot \dot{\underline{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \dot{\underline{q}}^T = \\ &= \underline{p} \cdot \dot{\underline{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot [\underline{\Phi}^{-1} \cdot (\underline{J}^T - \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T)] = \\ &= \underline{p} \cdot \dot{\underline{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{J}^T - \underline{\omega} \cdot \underline{I} \cdot \underline{\omega}^T \Rightarrow \\ 2T &= \underline{p} \cdot \dot{\underline{q}}^T + \underline{\omega} \cdot \underline{J}^T \quad (\Delta.2.67). \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα έναν 3×3 συμμετρικό πίνακα $\underline{I}^*(q)$:

$$\underline{I}^* = \underline{I} - \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \quad (\Delta.2.68).$$

Από τη (Δ.2.64) έχουμε :

$$\begin{aligned} \underline{p} - \dot{\underline{q}} \cdot \underline{S} &= \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \Rightarrow \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T - \dot{\underline{q}} \cdot \underline{\Phi}^T = \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \stackrel{(\Delta.2.65)}{\Rightarrow} \\ \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T + (\underline{\omega} \cdot \underline{I} - \underline{J}) &= \underline{\omega} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \Rightarrow \\ \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T - \underline{J} &= -\underline{\omega} \cdot (\underline{I} - \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T) \stackrel{(\Delta.2.68)}{\Rightarrow} \\ \underline{J} - \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T &= \underline{\omega} \cdot \underline{I}^* \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{\omega} = \underline{J} \cdot \underline{I}^{*-1} - \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \quad (\Delta.2.69).$$

Αντικαθιστώντας το ω στη (Δ.2.64) σύμφωνα με τη (Δ.2.69) έχουμε :

$$\dot{\underline{q}} = \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} - \underline{J} \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} + \underline{p} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \quad (\Delta.2.70).$$

Χρησιμοποιώντας τις (Δ.2.67), (Δ.2.69) και (Δ.2.70), σημειώνοντας ότι οι πίνακες \underline{S} και \underline{I}^* είναι συμμετρικοί, έχουμε τελικά την κινητική ενέργεια του συστήματος των N σωματιδίων στο Σ.Κ.Μ. σε Χαμιλτονιανή μορφή :

$$2T = \underline{p} \cdot (\underline{S}^{-1} + \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1}) \cdot \underline{p}^T - 2\underline{p} \cdot (\underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1}) \cdot \underline{J}^T + \underline{J} \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{J}^T \quad (\Delta.2.71).$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και υπό μορφή πινάκων :

$$2T = \begin{pmatrix} \underline{p} & \underline{J} \end{pmatrix} \cdot \underline{G}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{p}^T \\ \underline{J}^T \end{pmatrix} \quad (\Delta.2.72),$$

όπου :

$$\underline{G}^{-1}(q) = \left(\begin{array}{c|c} \underline{S}^{-1} + \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} & -\underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \\ \hline \dots & \dots \\ -\underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} & \underline{I}^{*-1} \end{array} \right) \quad (\Delta.2.73).$$

Το βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου είναι η σχέση (Δ.2.71) με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας τους σε Χαμιλτονιανή μορφή. Χρειάζεται ο υπολογισμός κάποιων πινάκων οι ορισμοί των οποίων δόθηκαν σ' αυτήν την παράγραφο. Επίσης απαραίτητες είναι οι σχέσεις που συνδέουν τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i , $i=1,2,\dots,3N-6$ ως προς τις οποίες θα έχουμε το Χαμιλτονιανό φορμαλισμό, με τα διανύσματα θέσης \vec{r}_i , $i=1,2,\dots,N$, των σωματιδίων στο Σ.Κ.Μ.. Στην ανάπτυξη του θέματος ακολουθήθηκε η διαδικασία που περιγράφεται στην αναφορά του Founargiotakis (1991). Επίσης χρησιμοποιήθηκαν βιβλία κλασσικής μηχανικής (Χατζηδημητρίου 1983, Kibble 1982, Goldstein 1980), κυρίως για τον ορισμό των γωνιών Euler και για την εύρεση της σχέσης αυτών, με τον πίνακα \underline{C} .

Δ.3. Το χημικό δυναμικό του FH_2 και των ισοτοπικών του αναλόγων.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε, χρησιμοποιώντας την κλασσική μηχανική, περιοδικές τροχιές σε ένα δυναμικό, το οποίο περιγράφει την αλληλεπίδραση δύο ατόμων υδρογόνου (H) και ενός ατόμου φθορίου (F), δηλαδή περιγράφει την αντίδραση :



Η αντίδραση αυτή θεωρείται ένα βασικό παράδειγμα εξώθερμης αντίδρασης (Lynch et al. 1991, και αναφορές σ' αυτήν την εργασία) για τους εξής λογούς : α) αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για τη μελέτη του χημικού laser H₂—F₂ β) περιλαμβάνει μόνο 3 πυρήνες, 11 ηλεκτρόνια και μόνο 1 βαρύ άτομο (φθόριο), οπότε είναι ένα σχετικά απλό πρόβλημα και για θεωρητική κβαντική μελέτη και γ) για το μοντέλο αυτό και τα ισοτοπικά του ανάλογα (HD, D₂, όπου D το άτομο του δευτερίου) υπάρχει πλήθος πειραματικών δεδομένων.

Η συνάρτηση του δυναμικού που περιγράφει την αλληλεπίδραση των τριών ατόμων, αποτελεί αντικείμενο μελέτης για σειρά ετών. Η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη χρήση θεωρητικών μοντέλων για την περιγραφή των δυνάμεων μεταξύ των ατόμων (ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, δυνάμεις Van der Waals, δεσμοί H) αλλά και από αριθμητικές προσαρμογές διαφόρων παραμέτρων ώστε να έχουμε την καλύτερη δυνατή συμφωνία με διάφορα πειραματικά δεδομένα. Παλιότερες συναρτησιακές εκφράσεις της επιφάνειας του δυναμικού FH₂ είναι οι αναφερόμενες στη διεθνή βιβλιογραφία ως επιφάνειες No. 5 (Brown et al. 1985) και No. 5A (Steckler et al. 1985). Η πιο πρόσφατη συναρτησιακή έκφραση του δυναμικού FH₂ την οποία και θα μελετήσουμε, αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως επιφάνεια δυναμικού 5 SEC (scaled external correlation). Αυτή αναπτύχθηκε από τους Lynch et al. (1991) και στηρίζεται σε αρκετές προγενέστερες εργασίες (Brown & Truhlar 1985, Brown et al. 1985, Dunning 1976, Steckler et al. 1985, Varandas 1988, Varandas & Brando 1982, Varandas & Silva 1986). Η ομάδα αυτή έχεφρασε το δυναμικό του συστήματος συναρτήσει των αποστάσεων R₁, R₂, R₃, μεταξύ των τριών ατόμων (bond lengths coordinates B.L.C.). Στην πραγματικότητα η συναρτησιακή σχέση :

$$V = V(R_1, R_2, R_3) \quad (\Delta.3.2),$$

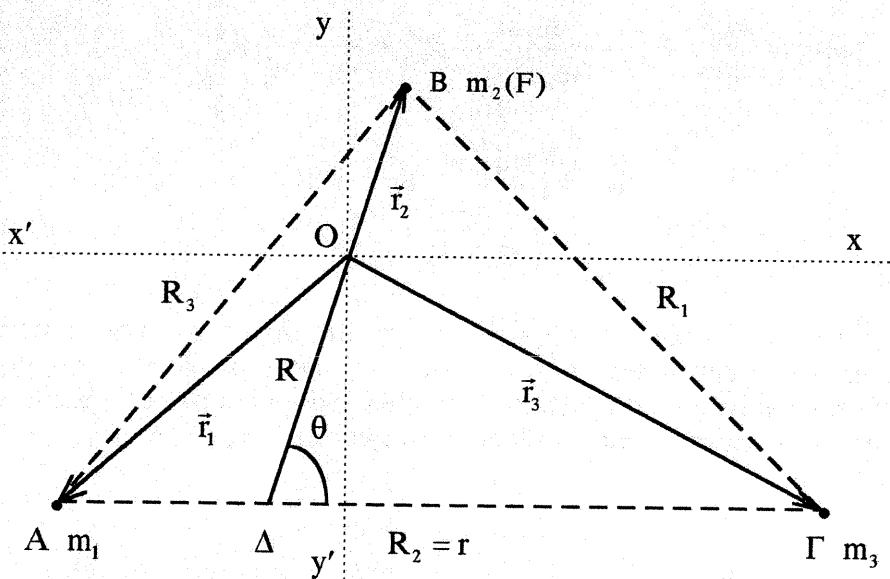
είναι αρκετά πολύπλοκη και δε δίνεται σε απλή μορφή. Γι' αυτό αναπτύχθηκε ειδικό πρόγραμμα στον υπολογιστή το οποίο για δεδομένες τιμές των R₁, R₂, R₃ υπολογίζει την τιμή του δυναμικού καθώς και τις τιμές των πρώτων παραγώγων του ως προς R₁, R₂, R₃:

$$\frac{\partial V}{\partial R_1} \Big|_{(R_1, R_2, R_3)}, \frac{\partial V}{\partial R_2} \Big|_{(R_1, R_2, R_3)}, \frac{\partial V}{\partial R_3} \Big|_{(R_1, R_2, R_3)}.$$

Σημειώνουμε ότι όλα τα μεγέθη υπολογίζονται σε ατομικές μονάδες, επομένως οι αποστάσεις μετριούνται σε ακτίνες Bohr ($\alpha_0 = 5,2918 \cdot 10^{-11}$ m), η ενέργεια σε hartree (1 hartree = $4,3598 \cdot 10^{-18}$ J), οι μάζες με μονάδα τη μάζα του ηλεκτρονίου ($m_e = 9,1095 \cdot 10^{-31}$ Kgr), ενώ η μονάδα μέτρησης του χρόνου ισούται με $2,4189 \cdot 10^{-17}$ sec.

Το δυναμικό (Δ.3.2) ισούται με 0, όταν το άτομο του φθορίου βρίσκεται σε άπειρη απόσταση απ' το μόριο του υδρογόνου και η απόσταση των ατόμων υδρογόνου είναι η κλασσική απόσταση ισορροπίας του ατόμου H₂. Σ' αυτήν την κατάσταση το φθόριο και το υδρογόνο δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Τα τρία άτομα βρίσκονται συνεχώς σε ένα επίπεδο, ως τρία μη συνευθειακά σημεία, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία έχουμε γραμμική διάταξη των ατόμων οπότε τα τρία σημεία δεν καθορίζουν ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Στο σχήμα Δ.4 φαίνεται η διάταξη των τριών σωματιδίων και σημειώνονται οι μεταξύ τους αποστάσεις R₁, R₂, R₃. Το σωματίδιο με μάζα m₂ το οποίο βρίσκεται στο σημείο B είναι το άτομο φθορίου ενώ τα άτομα υδρογόνου βρίσκονται στα σημεία A και Γ. Οι τιμές των μαζών των ατόμων είναι : m_F = 18,99840322·m_C, m_H = 1,007825035·m_C και m_D = 2m_H = 2,01565007·m_C, όπου m_C το $\frac{1}{12}$ της μάζας του ατόμου του άνθρακα 12 (¹²C).



Σχήμα Δ.4: Η διάταξη των δύο ατόμων υδρογόνου (m_1, m_3) και του ατόμου φθορίου (m_2) στο επίπεδο. Στο σχήμα σημειώνονται οι αποστάσεις μεταξύ των τριών ατόμων (bond lengths coordinates B.L.C.) R_1, R_2, R_3 καθώς και οι συντεταγμένες Jacobi (Jacobi coordinates J.C.) R, r, θ . Το σημείο Ο είναι το κέντρο μάζας των τριών ατόμων.

Το δυναμικό V (Δ.3.2) περιγράφει αλληλεπιδράσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τα φορτία των σωματιδίων, οπότε είναι ανεξάρτητο των μάζών τους. Η βαρυτική αλληλεπίδραση των ατόμων θεωρείται αμελητέα. Έτσι η αντικατάσταση ενός ή και των δύο ατόμων του υδρογόνου από άτομα δευτερίου δεν επηρεάζει τη συνάρτηση του δυναμικού.

Αντί των τριών μεταβλητών R_1, R_2, R_3 , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες Jacobi R, r, θ (Jacobi coordinates J.C) για τον καθορισμό των θέσεων των τριών σωματιδίων (Σχήμα Δ.4). Αυτές ορίζονται ως εξής: $r = (A\Gamma)$ είναι η απόσταση των δύο ατόμων υδρογόνου, $R = (B\Delta)$ είναι η απόσταση του ατόμου του φθορίου από το κέντρο μάζας Δ των δύο ατόμων υδρογόνου (το Δ είναι το μέσο του $A\Gamma$ αν τα δύο άτομα του υδρογόνου έχουν ίσες μάζες) και θ η γωνία $\hat{\Gamma}\Delta B$ η οποία σχηματίζεται ανάμεσα στο r και R με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου από το r .

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συντεταγμένες R_1, R_2, R_3 (B.L.C.) και R, r, θ (J.C) συνδέονται με τις σχέσεις:

$$R_1 = \left[\left(\frac{m_1}{m_1 + m_3} r \right)^2 + R^2 - 2 \frac{m_1}{m_1 + m_3} r R \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_2 = r \quad (\Delta.3.3),$$

$$R_3 = \left[\left(\frac{m_3}{m_1 + m_3} r \right)^2 + R^2 + 2 \frac{m_3}{m_1 + m_3} r R \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

και

$$R = \left[\frac{m_3}{m_1 + m_3} R_1^2 - \frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2} R_2^2 + \frac{m_1}{m_1 + m_3} R_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad r = R_2 \quad (\Delta.3.4).$$

$$\cos\theta = \frac{-R_1^2 + \left(\frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3} R_2 \right)^2 + R_3^2}{2 R_1 R_2}$$

Οπως θα φανεί στην επόμενη παράγραφο, η Χαμιλτονιανή του συστήματος μας γίνεται αρκετά απλή αν χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή του συστήματος μας διαβαθμισμένες συντεταγμένες Jacobi SR, Sr, θ (scaled Jacobi coordinates S.J.C.), οι οποίες ορίζονται συναρτήσει των συντεταγμένων Jacobi σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$SR = \frac{R}{\alpha}, \quad Sr = r \cdot \alpha, \quad \theta = \theta \quad (\Delta.3.5)$$

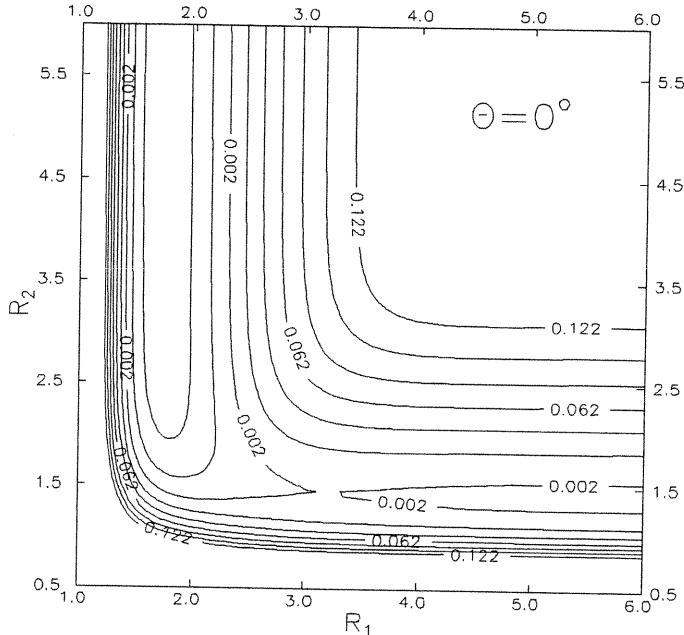
όπου :

$$\alpha = \left[\frac{(m_1 + m_2 + m_3) m_1 m_3}{(m_1 + m_3)^2 m_2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\Delta.3.6).$$

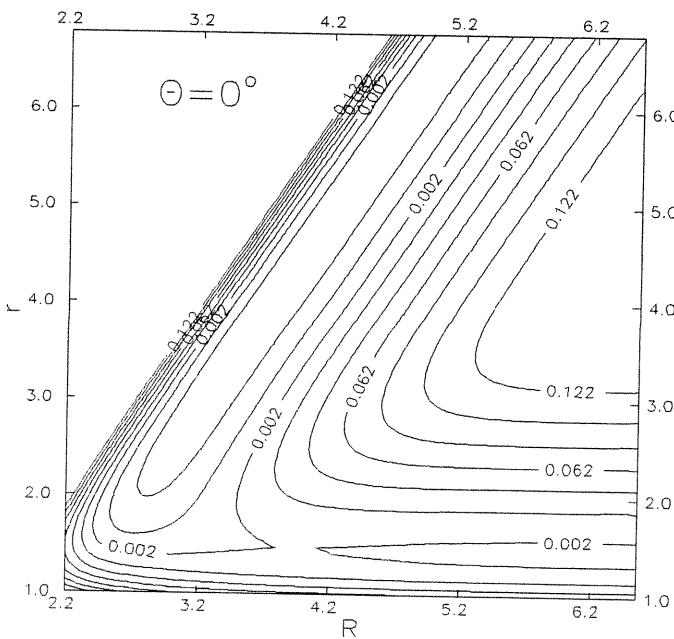
Στο σχήμα Δ.5 έχουμε σχεδιάσει τις ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού V (Δ.3.2) στο επίπεδο των B.L.C. R_1, R_2 για $\theta = 0^\circ$. Ανάλογα διαγράμματα έχουμε στα σχήματα Δ.6 και Δ.7 στο επίπεδο των J.C. R, r ($\theta = 0^\circ$) και στο επίπεδο των S.J.C. SR, Sr ($\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 84^\circ$) αντίστοιχα για την περίπτωση του FH_2 . Οπως έχουμε αναφέρει το δυναμικό V (Δ.3.2) ως συνάρτηση των B.L.C. είναι ανεξάρτητο των μαζών των ατόμων, ενώ αντίθετα αν θεωρηθεί συνάρτηση των J.C. ή των S.J.C. εξαρτάται από τις μάζες όπως φαίνεται από τις σχέσεις (Δ.3.3), (Δ.3.5) και (Δ.3.6). Συγκεκριμένα αν το δυναμικό V θεωρηθεί συνάρτηση των J.C. έχει την ίδια μορφή, όταν οι μάζες των ατόμων υδρογόνου είναι ίσες, όταν δηλαδή έχουμε δύο άτομα πρωτίου (H) ή δύο άτομα δευτερίου (D). Όταν έχουμε ένα άτομο πρωτίου και ένα άτομο δευτερίου η συνάρτηση διαφοροποιείται, όπως φαίνεται από τις σχέσεις (Δ.3.3), διατηρώντας όμως μια μορφή παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση (Σχήμα Δ.8). Η συνάρτηση του δυναμικού V ως προς τις S.J.C. είναι διαφορετική για κάθε συνδυασμό ατόμων υδρογόνου (H_2, D_2, HD) αφού η παράμετρος α (Δ.3.6) έχει κάθε φορά διαφορετική τιμή, διατηρώντας όμως μια παρόμοια μορφολογία (Σχήμα Δ.9).

Στο πάνω αριστερό άκρο των σχημάτων Δ.8β και Δ.9γ υπάρχει το κανάλι του δυναμικού, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση κατά την οποία το άτομο του φθορίου βρίσκεται ανάμεσα στα δύο άτομα υδρογόνου. Αυτή η περιοχή του δυναμικού υπάρχει σε όλα τα ισοτοπικά μοντέλα για $\theta = 0^\circ$ ή $\theta = 180^\circ$, όταν έχουμε δηλαδή γραμμική διάταξη των ατόμων, αλλά βρίσκεται συνήθως εκτός των ορίων του σχήματος (Σχήματα Δ.5, Δ.6, Δ.7α, Δ.8α, Δ.9α, β), αφού μας ενδιαφέρει η κατάσταση κατά την οποία το άτομο του φθορίου πλησιάζει τα άτομα του υδρογόνου από δεξιά ($\theta = 0^\circ$) ή από αριστερά ($\theta = 180^\circ$). Επομένως όταν τα τρία άτομα βρίσκονται συνεχώς σε μια ευθεία το φθόριο δε μπορεί να βρεθεί ανάμεσα στα δύο άτομα υδρογόνου αν αρχικά τα πλησιάζε από δεξιά ή από αριστερά. Άρα οι δύο διαφορετικές περιοχές του δυναμικού, οι οποίες φαίνονται στα

σχήματα $\Delta.8\beta$ και $\Delta.9\gamma$, δε μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, και όπως φαίνεται στα συγκεκριμένα σχήματα χωρίζονται από μια περιοχή στην οποία το δυναμικό απειρίζεται.

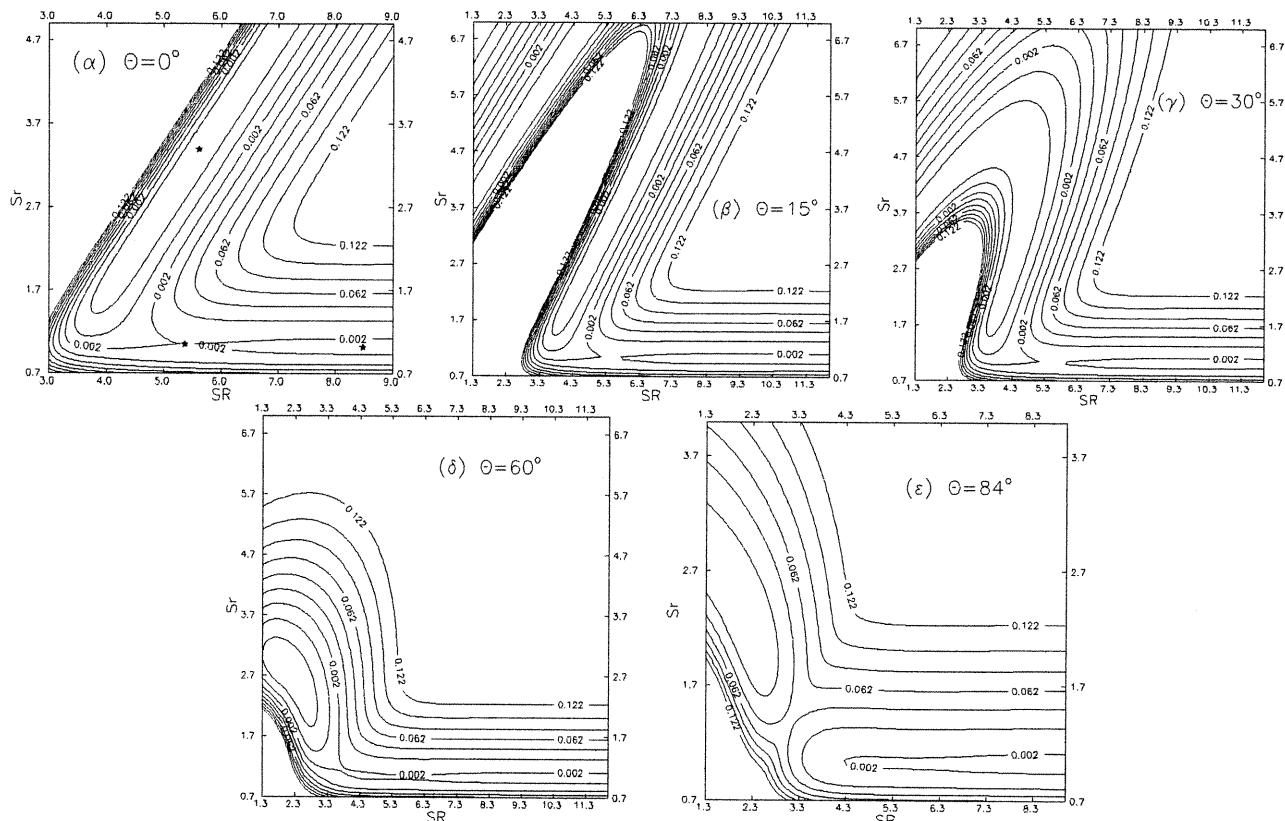


Σχήμα Δ.5 : Ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού του συστήματος FH_2 στο επίπεδο των B.L.C. R_1 , R_2 για $\theta = 0^\circ$ (γραμμική διάταξη των τριών ατόμων). Η μορφή του δυναμικού είναι ίδια για όλα τα ισοτοπικά ανάλογα του FH_2 , επειδή δεν εξαρτάται από τις μάζες των σωματιδίων. Λόγω συμμετρίας το δυναμικό έχει ακριβώς την ίδια μορφή για $\theta = 180^\circ$ στο επίπεδο R_3R_2 . Στην περιοχή όπου γίνονται πολύ πυκνές οι ισοδυναμικές καμπύλες η τιμή του δυναμικού αυξάνει απότομα τείνοντας προς το άπειρο, επομένως εκεί υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού απείρου ύψους.



Σχήμα Δ.6 : Ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού του συστήματος FH_2 στο επίπεδο των J.C. R , r για $\theta = 0^\circ$. Η μορφή του δυναμικού είναι ίδια για το σύστημα FD_2 όπως φαίνεται από τις σχέσεις ($\Delta.3.3$) καθώς και για $\theta = 180^\circ$ λόγω συμμετρίας. Στην περιοχή όπου γίνονται πολύ πυκνές οι ισοδυναμικές καμπύλες η τιμή του δυναμικού αυξάνει απότομα τείνοντας προς το άπειρο, επομένως εκεί υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού απείρου ύψους.

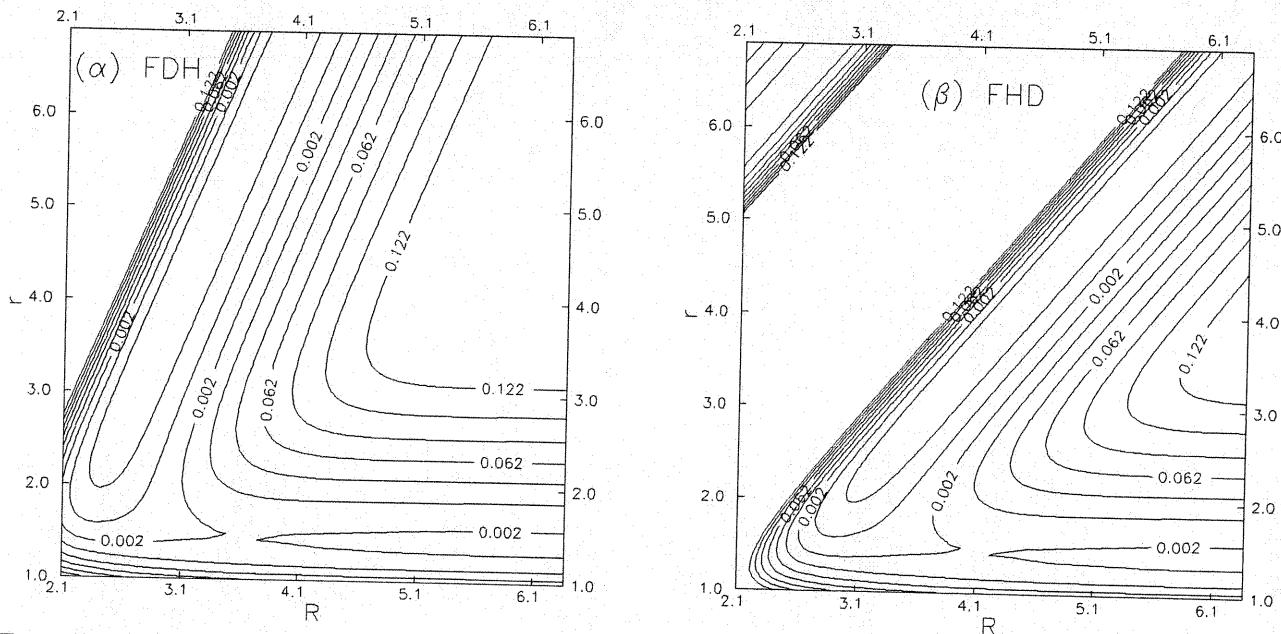
Όταν όμως $\theta \neq 0$ αυτές οι δύο περιοχές επικοινωνούν μεταξύ τους, αφού το άτομο του φθορίου μπορεί να βρεθεί και στην περιοχή ανάμεσα στα δύο άτομα υδρογόνου. Επομένως οι περιοχές αυτές δεν απομονώνονται πλέον από ένα φράγμα δυναμικού απείρου ύψους, αλλά συνδέονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στα σχήματα Δ.7β και γ.



Σχήμα Δ.7 : Ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού του συστήματος FH_2 στο επίπεδο των S.J.C SR , Sr για α) $\theta = 0^\circ$ β) $\theta = 15^\circ$ γ) $\theta = 30^\circ$ δ) $\theta = 60^\circ$ και ε) $\theta = 84^\circ$ ή για $\theta = 180^\circ$, 165° , 150° , 120° και 96° αντίστοιχα λόγω συμμετρίας. Το σχήμα (α) ταυτίζεται με το σχήμα Δ.6 με μόνη διαφορά την αλλαγή κλίμακας στους άξονες. Στο σχήμα (α) σημειώνονται με αστεράκι οι θέσεις των ελαχίστων του δυναμικού στα δύο κανάλια, καθώς και του μεγίστου που βρίσκεται ανάμεσά τους. Στις περιοχές όπου γίνονται πολύ πυκνές οι ισοδυναμικές καμπύλες η τιμή του δυναμικού αυξάνει απότομα τείνοντας προς το άπειρο, επομένως εκεί υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού απείρου ύψους.

Θα εξετάσουμε τώρα αναλυτικότερα, την περίπτωση κατά την οποία τα τρία άτομα βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το άτομο του φθορίου πλησιάζει τα δύο άτομα του υδρογόνου από τα δεξιά ($\theta = 0^\circ$) ή από τα αριστερά ($\theta = 180^\circ$) (Σχήμα Δ.4). Αν δεν υπάρχει αρχικά τάση αλλαγής της γωνίας θ ($\dot{\theta} = 0$) τα τρία άτομα θα συνεχίσουν, λόγω συμμετρίας του συστήματος, να βρίσκονται σε ευθεία γραμμή οπότε η συνάρτηση του δυναμικού θα παραμένει διαρκώς η ίδια $V(SR, Sr, 0^\circ)$ ή $V(SR, Sr, 180^\circ)$ και θα εξαρτάται μόνο από τα SR , Sr . Αντίθετα στη γενική περίπτωση όπου $\theta \neq 0$ η γωνία διαρκώς μεταβάλλεται, επομένως η συνάρτηση του δυναμικού δεν εξαρτάται μόνο από τα SR , Sr . Όλα αυτά φαίνονται εύκολα και από τις εξισώσεις Hamilton του συστήματος τις οποίες θα εξαγάγουμε στην επόμενη παράγραφο. Οπως έχουμε ήδη αναφέρει στην περίπτωση $\theta = 0^\circ$ η μορφή του δυναμικού V σε S.J.C. είναι παρόμοια για όλες τις δυνατές επιλογές των

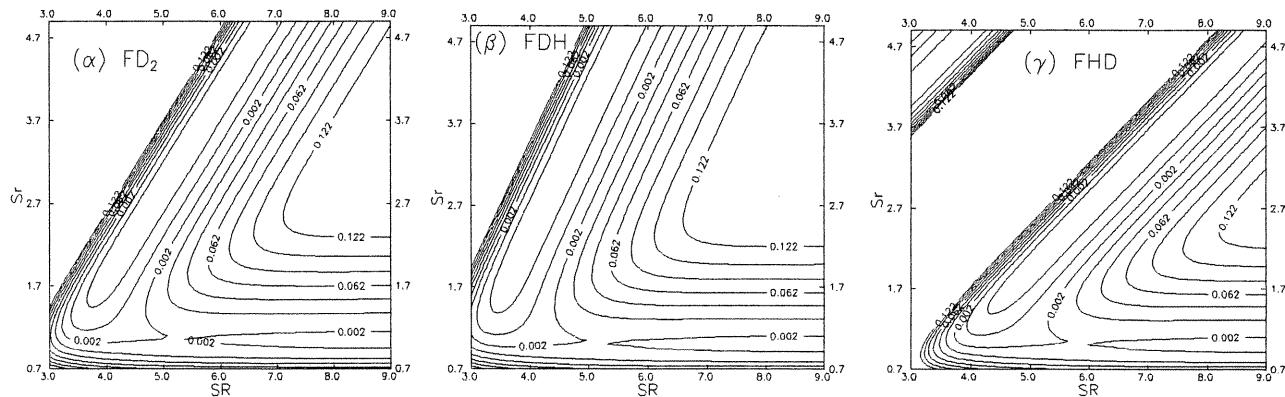
ατόμων υδρογόνου (Σχήματα Δ.8 και Δ.9), οπότε θα περιγράψουμε τη μορφή του δυναμικού V ως συνάρτηση των S.J.C. για την περίπτωση FH_2 .



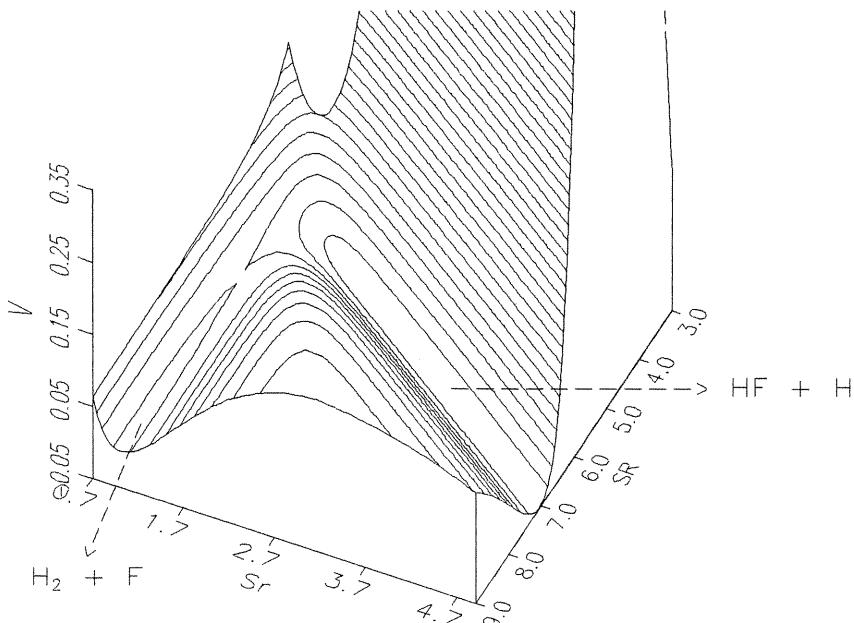
Σχήμα Δ.8 : Ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού του συστήματος : α) FDH, για $\theta = 0^\circ$ όταν το άτομο του φθορίου πλησιάζει τα άτομα υδρογόνου από τη μεριά του δευτερίου, δηλαδή $m_3 = 2m_1$ στο σχήμα Δ.4, και β) FHD, για $\theta = 0^\circ$ όταν το άτομο του φθορίου πλησιάζει τα άτομα υδρογόνου από τη μεριά του πρωτίου ($m_1 = 2m_3$), στο επίπεδο των J.C. R, r. Λόγω συμμετρίας για $\theta = 180^\circ$ η μορφή του δυναμικού του συστήματος FDH είναι αυτή του σχήματος (β), και η μορφή του δυναμικού του συστήματος FHD αυτή του σχήματος (α). Στις περιοχές όπου γίνονται πολύ πυκνές οι ισοδυναμικές καμπύλες η τιμή του δυναμικού αυξάνει απότομα τείνοντας προς το άπειρο, επομένως εκεί υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού απείρου ύψους.

Στο σχήμα Δ.7α βλέπουμε δύο διόδους που οδηγούν στο άπειρο, τις οποίες ονομάζουμε κανάλια διαφυγής. Το ένα κανάλι αντιστοιχεί σε μικρές τιμές του Sr, ($Sr \approx 1$) ενώ το SR αυξάνει. Σε αυτή την κατάσταση τα δύο άτομα υδρογόνου είναι κοντά, ενώ το άτομο του φθορίου πολύ μακριά τους. Επομένως σε αυτό το κανάλι έχουμε την κατάσταση $H_2 + F$ και το δυναμικό μηδενίζεται όταν το SR τείνει στο άπειρο. Το άλλο κανάλι αντιστοιχεί στην κατάσταση $HF + H$ οπότε οι τιμές των SR και Sr αυξάνουν. Στην περίπτωση που τα SR και Sr τείνουν στο άπειρο το δυναμικό έχει αρνητικές τιμές, πολύ μικρότερες από αυτές που παίρνει στο άλλο κανάλι (Σχήμα Δ.10).

Στο δυναμικό, $V(SR, Sr, 0^\circ)$ του FH_2 υπάρχουν δύο σημεία ευσταθούς ισορροπίας ένα σε κάθε κανάλι, ενώ ανάμεσα τους υπάρχει ένα σημείο ασταθούς ισορροπίας το οποίο αντιστοιχεί σε ένα "ύψωμα" της επιφάνειας του δυναμικού. Οι συντεταγμένες αυτών των σημείων, τα οποία σημειώνονται στο σχήμα Δ.7α, καθώς και η αντίστοιχη τιμή του δυναμικού δίνονται στον πίνακα Δ.1. Επίσης δίνουμε και τις τιμές R_1 , R_2 , R_3 γι' αυτά τα σημεία οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το ισοτοπικό πρόβλημα που εξετάζουμε. Όπως είναι φανερό για $\theta = 0^\circ$ έχουμε $R_3 = R_1 + R_2$ (Σχήμα Δ.4).



Σχήμα Δ.9 : Ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού για $\theta = 0^\circ$, στο επίπεδο των S.J.C. SR, Sr, για το σύστημα : α) FD₂ (ιδια μορφή για $\theta = 180^\circ$), β) FDH (ιδια μορφή για το σύστημα FHD για $\theta = 180^\circ$), και γ) FHD (ιδια μορφή για το σύστημα FDH για $\theta = 180^\circ$). Στις περιοχές όπου γίνονται πολύ πυκνές οι ισοδυναμικές καμπύλες η τιμή του δυναμικού αυξάνει απότομα τείνοντας προς το άπειρο, επομένως εκεί υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού απείρου ύψους.



Σχήμα Δ.10 : Η επιφάνεια του δυναμικού V του συστήματος FH₂ για $\theta = 0^\circ$ ως συνάρτηση των S.J.C. SR και Sr. Το σχήμα είναι η τρισδιάστατη εικόνα του σχήματος Δ.7α, όπως αυτό φαίνεται από την πάνω δεξιά γωνία του. Πάνω στην επιφάνεια έχουμε σχεδιάσει διάφορες ισοδυναμικές καμπύλες, έτσι ώστε να γίνεται καλύτερα αντιληπτή η μορφή της. Φαίνονται τα δύο κανάλια του δυναμικού τα οποία αντιστοιχούν στις καταστάσεις H₂+F και HF+H καθώς και η περιοχή στην οποία το δυναμικό απειρίζεται.

	SR	Sr	R ₁	R ₂	R ₃	V
α	8,47372	1,01515	5,44485	1,39990	6,84475	-0,000669
β	5,60861	3,38496	1,73319	4,66789	6,40108	-0,051105
γ	5,36301	1,04213	3,17048	1,43711	4,60759	0,002507

Πίνακας Δ.1 : Τα σημεία ισορροπίας του δυναμικού του συστήματος FH₂ για $\theta = 0^\circ$. Οι συντεταγμένες του ελαχίστου στο κανάλι H₂+F (α), του ελαχίστου στο κανάλι HF+H (β), και του μεγίστου (γ), δίνονται σε S.J.C. SR, Sr και σε B.L.C. R₁, R₂, R₃. Σημειώνουμε ότι οι συντεταγμένες R₁, R₂, R₃ είναι ανεξάρτητες του ισοτοπικού μοντέλου. Επειδή τα άτομα βρίσκονται συνεχώς πάνω σε μια ευθεία έχουμε R₃=R₁+R₂. Για κάθε σημείο σημειώνουμε και την τιμή του δυναμικού V.

Δ.4. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος FH₂ και των ισοτοπικών του αναλόγων.

Ακολουθώντας τη διαδικασία η οποία αναπτύχθηκε στην παράγραφο Δ.2 θα εξαγάγουμε την Χαμιλτονιανή του FH₂ ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο μάζας των τριών σωματιδίων (Σ.Κ.Μ.). Επιλέγουμε το Σ.Κ.Μ. ώστε τα τρία σωματίδια να βρίσκονται συνεχώς στο επίπεδο Oxy όπου ο το κέντρο μάζας των τριών ατόμων (Σχήμα Δ.4). Η κινητική ενέργεια T του συστήματος δίνεται από τη σχέση (Δ.2.71):

$$2T = \underline{p} \cdot (\underline{S}^{-1} + \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1}) \cdot \underline{p}^T - 2\underline{p} \cdot (\underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1}) \cdot \underline{J}^T + \underline{J} \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{J}^T$$

Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα θα εξετάσουμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία οι συνιστώσες της στροφορμής στους τρεις άξονες του Σ.Κ.Μ. είναι μηδέν, δηλαδή :

$$\underline{J} = (J_x \ J_y \ J_z) = (0 \ 0 \ 0) \quad (\Delta.4.1),$$

οπότε η κινητική ενέργεια παίρνει την απλούστερη μορφή :

$$2T = \underline{p} \cdot (\underline{S}^{-1} + \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T \cdot \underline{I}^{*-1} \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1}) \cdot \underline{p}^T \quad (\Delta.4.2).$$

Λόγω της (Δ.4.1) χρειαζόμαστε μόνο τρεις ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες q_i, i=1,2,3 για την περιγραφή του συστήματος ως προς το Σ.Κ.Μ., οι οποίες θα είναι οι διαβαθμισμένες συντεταγμένες Jacobi (S.J.C.) οι οποίες ορίστηκαν στις σχέσεις (Δ.3.5) και (Δ.3.6).

Ορίζουμε αρχικά τις παραμέτρους :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{m_1}{m_1+m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_3}{m_1+m_3}, \quad M = m_1+m_2+m_3 \\ \mu_1 &= \frac{m_2(m_1+m_3)}{M}, \quad \mu_2 = \frac{m_1m_3}{m_1+m_3} \\ \alpha &= \left[\frac{(m_1+m_2+m_3)m_1m_3}{(m_1+m_3)^2m_2} \right]^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{\frac{1}{4}} \\ \mu &= \left[\frac{m_1m_2m_3}{m_1+m_2+m_3} \right]^{\frac{1}{2}} = (\mu_1\mu_2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\Delta.4.3).$$

Για να υπολογίσουμε τους πίνακες, οι οποίοι εμφανίζονται στη σχέση (Δ.4.2), είναι απαραίτητο να εκφράσουμε τα διανύσματα θέσης \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 των τριών σωματιδίων συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων SR, Sr, θ. Από το σχήμα Δ.4 φαίνεται ότι :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha} SR - \frac{m_2}{M} \alpha SR \cos\theta, -\frac{m_2}{M} \alpha SR \sin\theta, 0 \right) \\ \vec{r}_2 &= \left(\frac{m_1 + m_3}{M} \alpha SR \cos\theta, \frac{m_1 + m_3}{M} \alpha SR \sin\theta, 0 \right) \\ \vec{r}_3 &= \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} Sr - \frac{m_2}{M} \alpha SR \cos\theta, -\frac{m_2}{M} \alpha SR \sin\theta, 0 \right)\end{aligned}\quad (\Delta.4.4).$$

Τα στοιχεία του πίνακα \underline{S} υπολογίζονται από τις σχέσεις (Δ.2.60) και (Δ.4.4), οπότε για τον \underline{S} και τον αντίστροφό του έχουμε :

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu SR^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu SR^2} \end{pmatrix} \quad (\Delta.4.5).$$

Για τον πίνακα Φ έχουμε από τις σχέσεις (Δ.2.62) και (Δ.4.4) :

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu SR^2 \end{pmatrix} \quad (\Delta.4.6).$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα \underline{I}^* μέσω της (Δ.2.68) χρειαζόμαστε τον πίνακα αδράνειας \underline{I} ο οποίος υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (Δ.2.56). Έτσι έχουμε :

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} \mu SR^2 \sin^2 \theta & -\mu SR^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -\mu SR^2 \sin \theta \cos \theta & \mu(Sr^2 + SR^2 \cos^2 \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(SR^2 + Sr^2) \end{pmatrix} \quad (\Delta.4.7)$$

και

$$\underline{I}^* = \underline{I} - \underline{\Phi} \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{\Phi}^T = \begin{pmatrix} \mu SR^2 \sin^2 \theta & -\mu SR^2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -\mu SR^2 \sin \theta \cos \theta & \mu(Sr^2 + SR^2 \cos^2 \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \mu Sr^2 \end{pmatrix} \quad (\Delta.4.8).$$

Η ορίζουσα του \underline{I}^* είναι $\mu^3 Sr^4 SR^2 \sin^2 \theta$ οπότε ο \underline{I}^{*-1} δίνεται από τη σχέση :

$$\underline{I}^{*-1} = \begin{pmatrix} Sr^2 + SR^2 \cos^2 \theta & \frac{\cos \theta}{\mu Sr^2 \sin \theta} & 0 \\ \frac{\mu SR^2 Sr^2 \sin \theta}{\cos \theta} & \frac{1}{\mu Sr^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu Sr^2} \end{pmatrix} \quad (\Delta.4.9).$$

Από τις (Δ.4.2), (Δ.4.5), (Δ.4.6) και (Δ.4.9) έχουμε για την κινητική ενέργεια Τ του συστήματος :

$$T = \frac{1}{2\mu} \left[P_{SR}^2 + P_{Sr}^2 + \left(\frac{1}{SR^2} + \frac{1}{Sr^2} \right) P_\theta^2 \right] \quad (\Delta.4.10),$$

όπου P_{SR} , P_{Sr} , P_θ οι συζυγείς ορμές των γενικευμένων συντεταγμένων SR , Sr , θ . Επομένως η Χαμιλτονιανή H του συστήματος είναι :

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[P_{SR}^2 + P_{Sr}^2 + \left(\frac{1}{SR^2} + \frac{1}{Sr^2} \right) P_\theta^2 \right] + V(SR, Sr, \theta) \quad (\Delta.4.11)$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις Hamilton :

$$\begin{aligned} SR &= \frac{P_{SR}}{\mu} & Sr &= \frac{P_{Sr}}{\mu} & \dot{\theta} &= \left(\frac{1}{SR^2} + \frac{1}{Sr^2} \right) \frac{P_\theta}{\mu} \\ \dot{P}_{SR} &= \frac{P_\theta^2}{\mu SR^3} - \frac{\partial V}{\partial SR} & \dot{P}_{Sr} &= \frac{P_\theta^2}{\mu Sr^3} - \frac{\partial V}{\partial Sr} & \dot{P}_\theta &= - \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\Delta.4.12)$$

Από τις σχέσεις (Δ.3.3), (Δ.3.5) και (Δ.3.6) εκφράζουμε τα R_1 , R_2 , R_3 συναρτήσει των SR , Sr , θ :

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} Sr \right)^2 + (\alpha SR)^2 - 2\alpha_1 Sr SR \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}} \\ R_2 &= \frac{Sr}{\alpha} \\ R_3 &= \left[\left(\frac{\alpha_3}{\alpha} Sr \right)^2 + (\alpha SR)^2 + 2\alpha_3 Sr SR \cos\theta \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\Delta.4.13).$$

Αν περιοριστούμε στην κατάσταση κατά την οποία τα τρία σωματίδια βρίσκονται στην ίδια ευθεία $\theta = 0^\circ$ και αρχικά η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή P_θ ισούται με 0, καταλαβαίνουμε από τις εξισώσεις (Δ.4.12), ότι δεν υπάρχει τάση αλλαγής της γωνίας, οπότε η γραμμική διαμόρφωση του συστήματος διατηρείται, αφού :

$$\dot{\theta} = \left(\frac{1}{SR^2} + \frac{1}{Sr^2} \right) \frac{P_\theta}{\mu} \Big|_{P_\theta=0} = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_\theta &= - \frac{\partial V}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = - \left(\frac{\partial V}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} + \frac{\partial V}{\partial R_2} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} + \frac{\partial V}{\partial R_3} \frac{\partial R_3}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \right) \stackrel{(\Delta.4.13)}{=} \\ &= - \frac{\partial V}{\partial R_1} \frac{\alpha_1 SR Sr}{R_1} \sin\theta \Big|_{\theta=0} + \frac{\partial V}{\partial R_3} \frac{\alpha_3 SR Sr}{R_1} \sin\theta \Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow P_\theta = 0. \end{aligned}$$

Επομένως το δυναμικό στο οποίο θα βρίσκονται τα σωματίδια είναι συνεχώς το $V(SR, Sr, 0^\circ)$ οπότε η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι :

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[P_{SR}^2 + P_{Sr}^2 \right] + V(SR, Sr, 0^\circ) \quad (\Delta.4.14).$$

Για $\theta = 0^\circ$ οι σχέσεις (Δ.4.13) μας δίνουν :

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha SR - \frac{\alpha_1}{\alpha} Sr \\ R_2 &= \frac{Sr}{\alpha} \\ R_3 &= \alpha SR + \frac{\alpha_3}{\alpha} Sr \end{aligned} \quad (\Delta.4.15),$$

όπου ισχύει $R_3 = R_1 + R_2$ όπως φαίνεται και από το σχήμα Δ.4. Οι εξισώσεις Hamilton (Δ.4.12) γίνονται επομένως :

$$\begin{aligned} \dot{SR} &= \frac{P_{SR}}{\mu} & \dot{Sr} &= \frac{P_{Sr}}{\mu} \\ \dot{P}_{SR} &= -\alpha \left(\frac{\partial V}{\partial R_1} + \frac{\partial V}{\partial R_2} \right) & \dot{P}_{Sr} &= \frac{1}{\alpha} \left(\alpha_1 \frac{\partial V}{\partial R_1} - \frac{\partial V}{\partial R_2} - \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial R_3} \right) \end{aligned} \text{ με } R_3 = R_1 + R_2 \quad (\Delta.4.16).$$

Στις εξισώσεις (Δ.4.16) έχουμε τις παραγώγους του δυναμικού $V(R_1, R_2, R_3)$ ως προς R_1, R_2, R_3 , οι οποίες όπως έχουμε αναφέρει υπολογίζονται μέσω ειδικού προγράμματος.

Δ.5. Μελέτη περιοδικών τροχιών του συστήματος FH_2 και των ισοτοπικών του αναλόγων.

Δ.5.1. Η επιφάνεια τομής.

Μια κλασσική πλέον μέθοδος για τη μελέτη των τροχιών ενός Χαμιλτονιανού συστήματος N βαθμών ελευθερίας (το οποίο αντιστοιχεί σε χώρο φάσης $2N$ διαστάσεων) είναι η εξέταση των διαδοχικών τομών (όταν αυτές υπάρχουν) των τροχιών με μια επιφάνεια $2N-1$ διαστάσεων, της μορφής :

$$S(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N) = 0 \quad (\Delta.5.1.1),$$

όπου q_1, q_2, \dots, q_N οι γενικευμένες θέσεις και p_1, p_2, \dots, p_N οι αντίστοιχες γενικευμένες ορμές. Η μέθοδος αυτή προτάθηκε από τον Poincaré (1892) και η επιφάνεια (Δ.5.1.1) ονομάζεται επιφάνεια τομής (surface of section).

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι να θεωρήσουμε επιφάνειες τομής της μορφής :

$$q_i - A = 0, \quad i=1,2,\dots,N \quad (\Delta.5.1.2),$$

όπου Α μια σταθερά, οπότε εξετάζουμε τα σημεία τομής των τροχιών του δυναμικού συστήματος με την επιφάνεια (Δ.5.1.2), όταν οι τροχιές τέμνουν την επιφάνεια με μια καθορισμένη φορά (π.χ. $\dot{q}_i > 0$). Η επιλογή της επιφάνειας τομής γίνεται ώστε να τέμνει σχεδόν όλες, τις τροχιές του συστήματος. Έτσι μια επιλογή της μορφής (Δ.5.1.2) για την επιφάνεια τομής είναι ικανοποιητική όταν για παράδειγμα στο σύστημα μας υπάρχουν κάποιες συμμετρίες (Hénon & Heiles 1964, Contopoulos 1965, 1968, Contopoulos & Magnenat 1985).

Για το δυναμικό του FH_2 , $V(SR, Sr, 0^\circ)$ μια επιλογή, για την επιφάνεια τομής, της μορφής (Δ.5.1.2) δεν είναι ικανοποιητική γιατί δεν μπορούν να την τμήσουν όλες οι περιοδικές τροχιές που βρίσκονται στα δύο κανάλια του δυναμικού (Σχήμα Δ.7a). Παρότι το δυναμικό $V(SR, Sr, 0^\circ)$ δεν είναι συμμετρικό είναι φανερό ότι μια κατάλληλη επιφάνεια τομής είναι μια επιφάνεια η οποία περνάει μέσα και από τα δύο κανάλια του δυναμικού. Μια τέτοια επιφάνεια η οποία διέρχεται από τα τρία σημεία ισορροπίας του πίνακα Δ.1 φαίνεται στο σχήμα Δ.11. Η συναρτησιακή μορφή αυτής της επιφάνειας σε S.J.C. για το σύστημα FH_2 με $\theta = 0^\circ$, βρέθηκε αριθμητικά ότι είναι :

$$e^{-50(Sr-1.05)} + 0.9508 Sr + 2.39 - SR = 0 \quad (\Delta.5.1.3).$$

Οπως έχουμε αναφέρει το δυναμικό του FH_2 δεν εξαρτάται από τις μάζες των ατόμων, δηλαδή η συναρτησιακή του μορφή σε B.L.C. $V(R_1, R_2, R_3)$ δεν αλλάζει αν έχουμε κάποιο ισοτοπικό σύστημα (HD, D_2), επομένως και η εξίσωση της επιφάνειας τομής σε B.L.C. παραμένει αμετάβλητη. Αντίθετα επειδή οι S.J.C. εξαρτώνται από τις μάζες των ατόμων η σχέση (Δ.5.1.3) δίνει την εξίσωση της επιφάνειας τομής μόνο για το σύστημα FH_2 . Αν με τόνο συμβολίσουμε τα μεγέθη σε ένα ισοτοπικό σύστημα (τα μεγέθη χωρίς τόνους αναφέρονται στο σύστημα FH_2) τότε από τις σχέσεις (Δ.4.15) έχουμε :

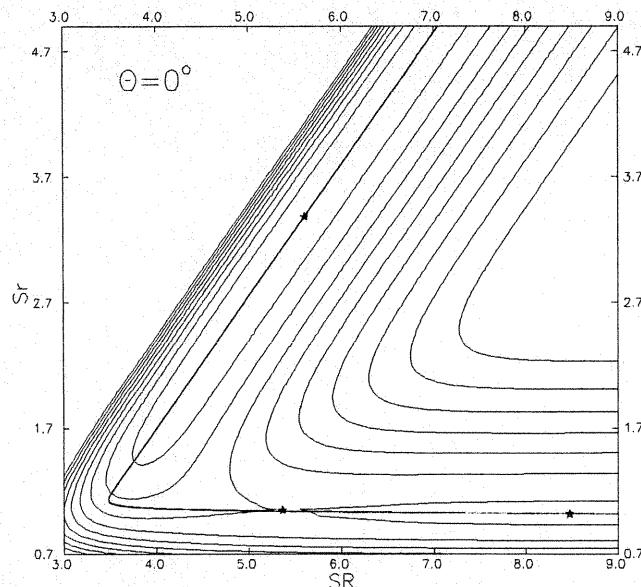
$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \alpha SR - \frac{\alpha_1}{\alpha} Sr = \alpha' SR' - \frac{\alpha'_1}{\alpha'} Sr' \\ R_2 &= \frac{Sr}{\alpha} = \frac{Sr'}{\alpha'} \\ R_3 &= \alpha SR + \frac{\alpha_3}{\alpha} Sr = \alpha' SR' + \frac{\alpha'_3}{\alpha'} Sr' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Sr &= \frac{\alpha}{\alpha'} Sr' \quad , \quad Sr' = \frac{\alpha'}{\alpha} Sr \\ SR &= \frac{\alpha'}{\alpha} SR' + \frac{\alpha'_3 - \alpha_3}{\alpha \alpha'} Sr' \quad , \quad SR' = \frac{\alpha}{\alpha'} SR + \frac{\alpha_3 - \alpha'_3}{\alpha \alpha'} Sr \end{aligned} \quad (\Delta.5.1.4).$$

Επομένως η εξίσωση της επιφάνειας τομής (Δ.5.1.3) σε S.J.C. SR', Sr', θ' για ένα ισοτοπικό σύστημα γίνεται μέσω των (Δ.5.1.4) :

$$e^{-50(\frac{\alpha}{\alpha'} Sr' - 1.05)} + \left[0.9508 \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\alpha_3 - \alpha'_3}{\alpha \alpha'} \right] Sr' + 2.39 - \frac{\alpha'}{\alpha} SR' = 0 \quad (\Delta.5.1.5).$$

Θα εξηγήσουμε τώρα τον τρόπο αριθμητικού υπολογισμού της τομής μιας τροχιάς ενός δυναμικού συστήματος, με μια επιφάνεια τομής της μορφής (Δ.5.1.1) (Hénon 1982). Αρχικά θα εξετάσουμε την απλή περίπτωση που περιγράφει ο Hénon όταν η εξίσωση της επιφάνειας τομής να δίνεται από μια σχέση της μορφής (Δ.5.1.2).



Σχήμα Δ.11 : Τομή της επιφάνειας τομής (Δ.5.1.3) στο επίπεδο των S.J.C. SR, S_r για το σύστημα του FH₂ για $\theta = 0^\circ$. Στο σχήμα σημειώνονται και οι ισοδυναμικές καμπύλες του δυναμικού. Η επιφάνεια έχει επιλεγεί ώστε να βρίσκεται και στα δύο κανάλια του δυναμικού και να περνάει από τα τρία σημεία ισορροπίας τα οποία σημειώνονται στο σχήμα με ένα αστεράκι.

Έστω λοιπόν ένα αυτόνομο δυναμικό σύστημα η κατάσταση του οποίου κάθε χρονική στιγμή προσδιορίζεται από τις τιμές M μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_M . Η χρονική του εξέλιξη περιγράφεται από M το πλήθος διαφορικές εξισώσεις της μορφής :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ &\vdots \\ \frac{dx_M}{dt} &= f_M(x_1, x_2, \dots, x_M) \end{aligned} \quad (\Delta.5.1.6).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η εξίσωση της επιφάνειας τομής είναι :

$$S = x_M - A = 0 \quad (\Delta.5.1.7),$$

όπου A μια σταθερά.

Χρησιμοποιώντας μια μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης (π.χ. Runge-Kutta) λύνουμε αριθμητικά το σύστημα (Δ.5.1.6) των διαφορικών εξισώσεων. Παρακολουθούμε με αυτόν τον τρόπο τη χρονική εξέλιξη μιας τροχιάς του συστήματος, υπολογίζοντας ταυτόχρονα την τιμή της ποσότητας S (Δ.5.1.7) σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης. Αλλαγή του πρόσημου της S μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών σημαίνει προφανώς ότι η τροχιά έτημησε την επιφάνεια τομής. Συνήθως μας ενδιαφέρουν οι τομές όταν η τροχιά εξελίσσεται με μια συγκεκριμένη φορά π.χ. η τιμή της S γίνεται από αρνητική θετική. Για να βρούμε το ακριβές σημείο τομής της τροχιάς με την επιφάνεια S, αντί του συστήματος (Δ.5.1.6), στο οποίο η ανεξάρτητη παράμετρος, ως προς την οποία κάνουμε την αριθμητική ολοκλήρωση, είναι ο χρόνος t, χρησιμοποιούμε ένα σύστημα M διαφορικών εξισώσεων στο οποίο η παράμετρος ολοκλήρωσης είναι η x_M. Το σύστημα των M αυτών διαφορικών

εξισώσεων προκύπτει διαιρώντας τις $M - 1$ πρώτες εξισώσεις του (Δ.5.1.6) με την τελευταία την οποία στη συνέχεια αντιστρέφουμε :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_M} &= \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_M)}{f_M(x_1, x_2, \dots, x_M)} \\ \frac{dx_2}{dx_M} &= \frac{f_2(x_1, x_2, \dots, x_M)}{f_M(x_1, x_2, \dots, x_M)} \\ \frac{dx_M}{dx_M} &= \frac{\vdots}{f_M(x_1, x_2, \dots, x_M)} \\ \frac{dx_{M-1}}{dx_M} &= \frac{f_{M-1}(x_1, x_2, \dots, x_M)}{f_M(x_1, x_2, \dots, x_M)} \\ \frac{dt}{dx_M} &= \frac{1}{f_M(x_1, x_2, \dots, x_M)} \end{aligned} \quad (\Delta.5.1.8).$$

Επομένως η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής : Ολοκληρώνουμε το σύστημα (Δ.5.1.6) ως προς το χρόνο t μέχρι να βρούμε την κατάλληλη αλλαγή προσήμου της ποσότητας S (Δ.5.1.7), η οποία υποδηλώνει τομή της τροχιάς με την επιφάνεια τομής κατά την επιθυμητή φορά. Χρησιμοποιώντας σαν αρχική συνθήκη το τελευταίο ή το προτελευταίο σημείο της ολοκλήρωσης, ολοκληρώνουμε το σύστημα (Δ.5.1.8) ως προς τη μεταβλητή x_M για ένα μόνο βήμα ολοκλήρωσης το οποίο είναι $A - x_M$. Με αυτήν τη διαδικασία βρισκόμαστε ακριβώς πάνω στην επιφάνεια τομής.

Τα δύο συστήματα διαφορικών εξισώσεων (Δ.5.1.6) και (Δ.5.1.8) μπορούν να γραφούν σε κοινή μορφή :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= K f_1(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= K f_2(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ &\vdots \\ \frac{dx_M}{d\tau} &= K f_M(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ \frac{dt}{d\tau} &= K \end{aligned} \quad (\Delta.5.1.9),$$

όπου τη η παράμετρος ως προς την οποία γίνεται η ολοκλήρωση κάθε φορά ($\tau = t$ για το σύστημα (Δ.5.1.6) και $\tau = x_M$ για το σύστημα (Δ.5.1.8)) και $K=1$ ή $K=1/f_M(x_1, x_2, \dots, x_M)$ για τα συστήματα (Δ.5.1.6) και (Δ.5.1.8) αντίστοιχα.

Στη γενική περίπτωση όπου η επιφάνεια τομής ορίζεται από μια πολύπλοκη σχέση των δυναμικών μεταβλητών x_1, x_2, \dots, x_M , της μορφής :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_M) = 0 \quad (\Delta.5.1.10),$$

όπως συμβαίνει και στο πρόβλημα μας (Σχέση Δ.5.1.3), ορίζουμε μια ακόμα μεταβλητή :

$$x_{M+1} = S(x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (\Delta.5.1.11),$$

και στο σύστημα (Δ.5.1.6) προσθέτουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dx_{M+1}}{dt} = f_{M+1}(x_1, x_2, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^M f_i(x_1, x_2, \dots, x_M) \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad (\Delta.5.1.12).$$

Επομένως έχουμε ένα νέο σύστημα της μορφής ($\Delta.5.1.6$), $M+1$ διαφορικών εξισώσεων, για το οποίο η επιφάνεια τομής ορίζεται από μια σχέση της μορφής ($\Delta.5.1.7$) :

$$x_{M+1} = 0 \quad (\Delta.5.1.13).$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε τη διαδικασία που αναπτύξαμε προηγουμένως για να βρούμε τα σημεία τομής των διαφόρων τροχιών με την επιφάνεια ($\Delta.5.1.10$) η οποία έχει πάρει την απλή μορφή ($\Delta.5.1.13$).

Επομένως η εύρεση των σημείων τομής των τροχιών ενός δυναμικού συστήματος με την επιφάνεια Poincaré ανάγεται στην αριθμητική ολοκλήρωση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων της μορφής ($\Delta.5.1.9$). Όταν η μορφή της επιφάνειας Poincaré είναι απλή (Σχέση $\Delta.5.1.7$) στο σύστημα ($\Delta.5.1.9$) έχουμε διαφορικές εξισώσεις των δυναμικών μεταβλητών του δυναμικού συστήματος. Αντίθετα, όταν η μορφή της επιφάνειας Poincaré είναι πολύπλοκη (Σχέση $\Delta.5.1.10$), μελετάμε ένα σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό για το οποίο η επιφάνεια Poincaré έχει απλή μορφή (Σχέση $\Delta.5.1.13$). Το νέο αυτό δυναμικό σύστημα προκύπτει από το αρχικό σύστημα αν εισάγουμε μια ακόμη μεταβλητή (Σχέση $\Delta.5.1.11$), οπότε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων προσθέτουμε μια ακόμη εξίσωση (Σχέση $\Delta.5.1.12$).

Δ.5.2. Περιοδικές τροχιές του δυναμικού συστήματος FH_2 και των ισοτοπικών του αναλόγων.

Το δυναμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή ($\Delta.4.14$) έχει πλήθος περιοδικών τροχιών. Το σύστημα αυτό δεν είναι ένα καθαρό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας αφού η Χαμιλτονιανή ($\Delta.4.14$) είναι μια ειδική περίπτωση ($\theta = P_\theta = 0$) της γενικής Χαμιλτονιανής ($\Delta.4.11$), η οποία είναι τριών βαθμών ελευθερίας. Επομένως οι περιοδικές τροχιές του Χαμιλτονιανού συστήματος ($\Delta.4.14$) είναι στην πραγματικότητα περιοδικές τροχιές ενός συστήματος τριών βαθμών ελευθερίας, οπότε, από άποψη ευστάθειας μπορούν να είναι ευσταθείς, απλά ασταθείς, διπλά ασταθείς, αλλά όχι μιγαδικά ασταθείς. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν περιορίσουμε το πρόβλημα στο σύστημα ($\Delta.4.14$) έχουμε διαχωρίσει τους βαθμούς ελευθερίας της γενικής Χαμιλτονιανής ($\Delta.4.11$) σε δύο, οι οποίοι αναφέρονται στη γραμμική διάταξη των ατόμων, και σε έναν ο οποίος αναφέρεται στην απόκλιση του συστήματος από αυτή τη διάταξη. Επομένως οι δύο από τις τέσσερις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα, μιας περιοδικής τροχιάς του συστήματος ($\Delta.4.14$) θα είναι ή πραγματικές ή συζυγείς μιγαδικές, οι οποίες όμως βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ανεξάρτητα λοιπόν των δύο άλλων ιδιοτιμών, οι οποίες αντιστοιχούν στον τρίτο βαθμό ελευθερίας, οι περιοδικές τροχιές δεν μπορεί να είναι μιγαδικά ασταθείς. Η γνώση των περιοδικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος είναι σημαντική γιατί αποτελεί ένα μέσο για την κατανόηση της δομής του χώρου φάσεων και του βαθμού οργάνωσης ή χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματος. Πλήθος εργασιών ασχολούνται με τη μελέτη περιοδικών τροχιών και της ευστάθειά τους σε Χαμιλτονιανά συστήματα τριών βαθμών ελευθερίας, μερικές εκ των οποίων αναφέρονται στην παράγραφο A.2.

Μερικές περιοδικές τροχιές του Χαμιλτονιανού συστήματος ($\Delta.4.14$) φαίνονται στο σχήμα $\Delta.12$. Οι τροχιές έχουν σχεδιαστεί στο επίπεδο SR Sr. Οι αρχικές τους συνθήκες και το είδος της ευστάθειας τους αναφέρονται στον Πίνακα $\Delta.2$.

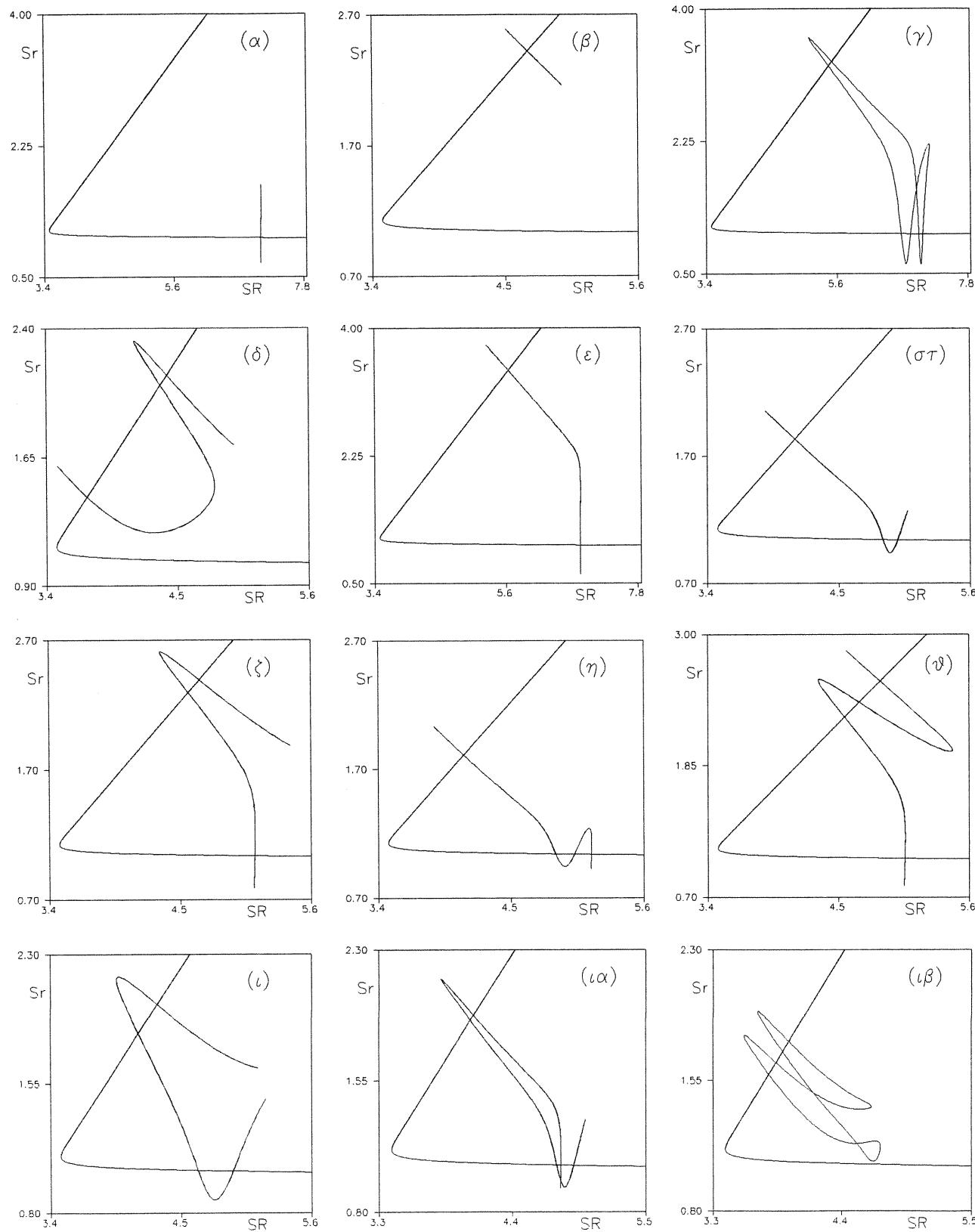
	E	SR	Sr	PSR	PSr	T	Ευστ.
1	0,069000	7,078652	1,000000	0,081682	15,490220	397,965088	SU
2	-0,023945	4,689030	2,417995	-7,039815	6,546410	367,619981	SU
3	0,112334	6,676320	1,025787	-2,638593	19,562030	1514,648947	SU
4	0,005992	3,738557	1,418339	-10,257944	6,757577	1640,368493	SU
5	0,112334	6,836456	1,025787	0,094599	19,759704	1033,612411	SU
6	0,008000	4,131454	1,831567	-10,455187	9,280855	1206,149216	SU
7	0,032610	5,130610	1,274671	-0,091584	9,020778	1210,400561	DU
8	0,008000	4,110916	1,809966	-10,457659	9,233523	1570,132402	DU
9	0,031004	4,674792	2,403021	-13,949199	9,472743	1619,641652	DU
10	0,019993	4,138611	1,839094	-8,932042	12,563193	1603,842694	SU
11	0,010000	4,056283	1,894203	14,487997	-13,347895	2823,515220	SU
12	0,001457	3,893297	1,714750	12,863642	-12,215186	2281,060194	SU

Πίνακας Δ.2 : Αρχικές συνθήκες SR, Sr, PSR και PSr των 12 τροχιών του σχήματος Δ.12. Όλες οι τροχιές προέρχονται από το σύστημα FH₂ εκτός των δύο τελευταίων οι οποίες προέρχονται από το FD₂. Για κάθε τροχιά σημειώνουμε την τιμή της ενέργειας E και της περιόδου της T καθώς και το είδος της ευστάθειας της Ευστ. (SU απλά ασταθής και DU διπλά ασταθής).

Όλες οι περιοδικές τροχιές είναι τροχιές του δυναμικού συστήματος του FH₂ εκτός από τις τροχιές των σχημάτων Δ.12 α,ιβ, οι οποίες προέρχονται από το δυναμικό του FD₂. Κάποιες από τις περιοδικές τροχιές του πίνακα Δ.2 είναι οι βασικές τροχιές του συστήματος όπως η τροχιά του σχήματος Δ.12α, η οποία γεννιέται στο ελάχιστο του δυναμικού στο κανάλι H₂ + F (Πίνακας Δ.1). Η συμπεριφορά των βασικών τροχιών του συστήματος μελετήθηκε από τον Φουναριωτάκη (1996). Επίσης η τροχιά του σχήματος Δ.12β προέρχεται από το ελάχιστο στο κανάλι HF + H. Γενικά οι τροχιές μπορούν να προέρχονται από διακλάδωση των βασικών τροχιών του συστήματος, υπάρχουν όμως και περιοδικές τροχιές, οι οποίες εμφανίζονται για κάποια τιμή της ενέργειας του συστήματος χωρίς να αποτελούν διακλάδωση κάποιας προϋπάρχουσας τροχιάς, όπως για παράδειγμα οι τροχιές των σχημάτων Δ.12ε,στ και η. Οι τροχιές αυτές ονομάζονται μη κανονικές περιοδικές τροχιές (μ.κ.π.τ.) (irregular periodic orbits, Contopoulos 1970a, Barbanis 1986). Οι περισσότερες περιοδικές τροχιές του σχήματος Δ.12 διαγράφουν στο επίπεδο SR Sr μια καμπύλη με αντίστροφες φορές κίνησης μέσα σε μια περίοδο, εκτός των τροχιών των σχημάτων Δ.12γ και ιβ, οι οποίες διαγράφουν μια κλειστή καμπύλη με μια φορά κίνησης. Κάποιες περιοδικές τροχιές αναπτύσσονται κυρίως σε ένα από τα δύο κανάλια κίνησης, όπως για παράδειγμα, οι τροχιές των σχημάτων Δ.12α,στ και η δείχνουν μια προτίμηση προς το κανάλι της κατάστασης H₂ + F, ενώ οι τροχιές των σχημάτων Δ.12β,δ,ζ και θ προς το άλλο κανάλι. Οι υπόλοιπες τροχιές βρίσκονται σε μια ενδιάμεση περιοχή χωρίς να δείχνουν μια σαφή προτίμηση προς το κανάλι.

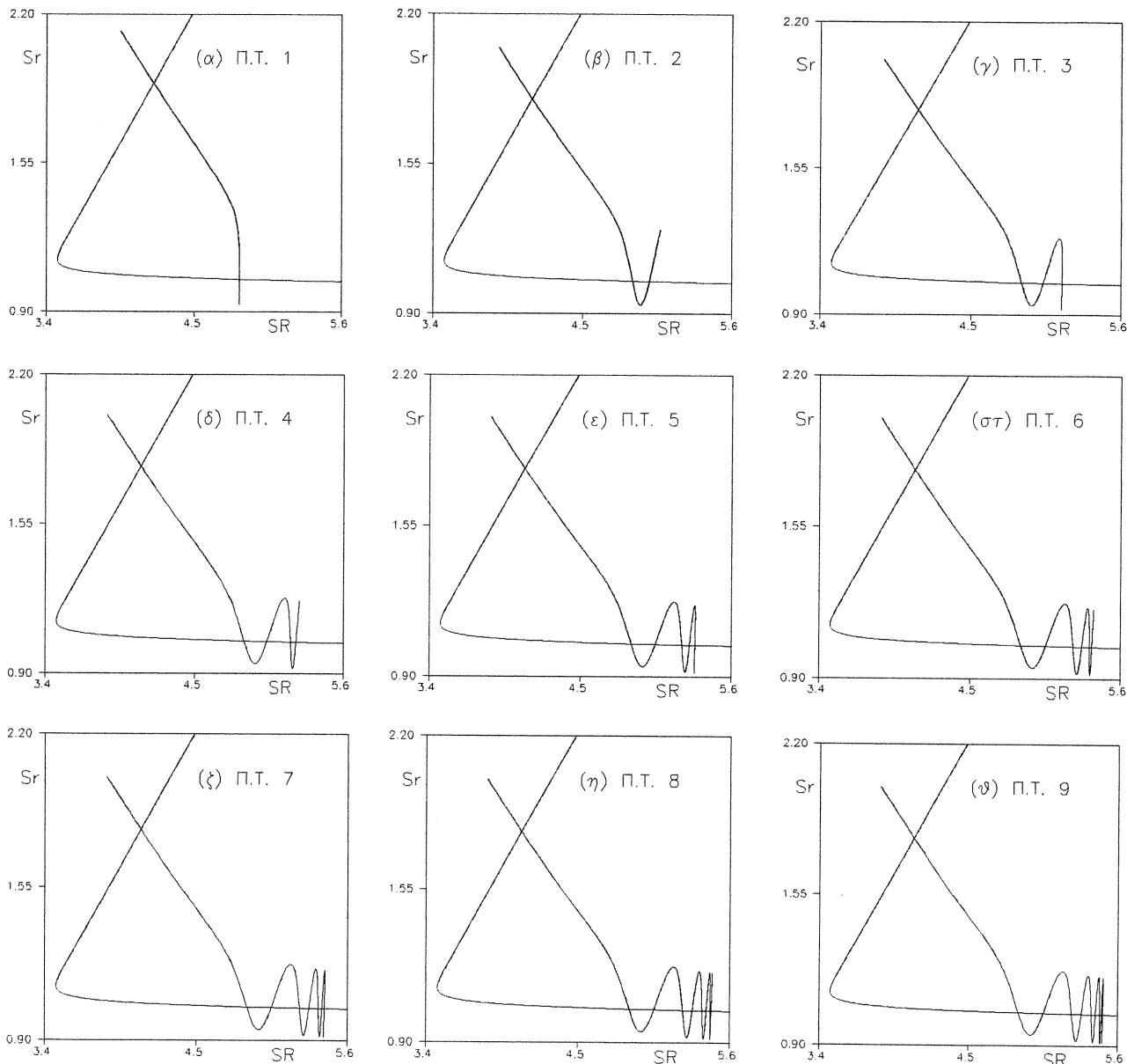
Δ.5.3. Αριθμητική μελέτη των μη κανονικών περιοδικών τροχιών στο σύστημα του FH₂.

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με τη μελέτη μιας ομάδας περιοδικών τροχιών του συστήματος (Δ.4.14), οι οποίες δεν προέρχονται από διακλάδωση άλλων περιοδικών τροχιών, είναι δηλαδή μη κανονικές περιοδικές τροχιές (μ.κ.π.τ.), και παρουσιάζουν μεταξύ τους μορφολογικές ομοιότητες. Στο σχήμα Δ.13 φαίνεται η μορφή 9 μ.κ.π.τ., του συστήματος FH₂, στο επίπεδο SR Sr όταν η αριθμητική τιμή της Χαμιλτονιανής (Δ.4.14) (η οποία στη συνέχεια θα αναφέρεται και ως ενέργεια E του συστήματος) είναι E=0,008. Στα σχήματα Δ.13 έχουμε σχεδιάσει και την τομή της επιφάνειας τομής Poincaré (Δ.5.1.3) με το



Σχήμα Δ.12 : Μερικές περιοδικές τροχιές του συστήματος FH_2 εκτός των τροχιών (ια) και (ιβ), οι οποίες προέρχονται από το σύστημα FD_2 . Σε κάθε σχήμα σχεδιάζουμε και την τομή της επιφάνειας τομής Poincaré με το επίπεδο SR Sr.

επίπεδο SR Sr, έτσι ώστε να είναι εύκολα αντιληπτή η περιοχή του επιπέδου SR Sr στην οποία εμφανίζεται η κάθε τροχιά.



Σχήμα Δ.13 : Εννέα μη κανονικές περιοδικές τροχιές (Π.Τ.) του συστήματος FH_2 στο επίπεδο SR Sr. Κάθε τροχιά αριθμείται από το πλήθος των ταλαντώσεων που κάνει στο κανάλι $H_2 + F$. Σε κάθε σχήμα έχουμε σχεδιάσει και την τομή της επιφάνειας τομής Poincaré με το επίπεδο SR Sr. Η ενέργεια του συστήματος για κάθε τροχιά είναι $E=0,008$.

Παρατηρούμε ότι παρότι οι τροχιές αναπτύσσονται και στα δύο κανάλια του δυναμικού, δείχνουν μια σαφή προτίμηση προς το κανάλι της κατάστασης $H_2 + F$ στο οποίο εμφανίζουν κάποιες ταλαντώσεις. Ανάλογα με τον αριθμό αυτών των ταλαντώσεων ονομάζουμε και τις μ.κ.π.τ.. Για παράδειγμα η μ.κ.π.τ. 3 πραγματοποιεί 3 ταλαντώσεις στο κανάλι $H_2 + F$. Σημειώνουμε ότι όσο αυξάνει η τάξη των μ.κ.π.τ., έχουμε όλο και περισσότερες ταλαντώσεις, οι οποίες γίνονται όλο και πιο πυκνές στο χώρο, δηλαδή αναπτύσσονται σε συνεχώς μικρότερο εύρος τιμών του SR. Επειδή η προβολή των 9 μ.κ.π.τ. στο επίπεδο SR Sr είναι μια μη κλειστή γραμμή καταλαβαίνουμε ότι σε χρόνο ίσο

με την περίοδο της εκάστοτε μ.κ.π.τ., η γραμμή αυτή διαγράφεται δύο φορές με αντίθετη φορά διαγραφής.

Κάθε μ.κ.π.τ. τέμνει την επιφάνεια τομής Poincaré σε αρκετά σημεία. Γενικά η μ.κ.π.τ. $i, i=1,2,..,9$ τέμνει την επιφάνεια Poincaré σε $i+1$ σημεία με μια συγκεκριμένη φορά τομής, εκ των οποίων το 1 βρίσκεται στο κανάλι HF + H και τα υπόλοιπα i στο κανάλι H₂ + F. Στη συνέχεια, όποτε αναφερόμαστε στα σημεία τομής μιας τροχιάς με την επιφάνεια Poincaré, θα δίνουμε μόνο τις συντεταγμένες του σημείου με τη μικρότερη τιμή στον άξονα SR. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για τις μ.κ.π.τ. του σχήματος Δ.13, αυτό το σημείο είναι το σημείο τομής της μ.κ.π.τ. με την επιφάνεια Poincaré στο κανάλι HF + H. Οι συντεταγμένες αυτών των σημείων για E=0,008 δίνονται στο πρώτο μέρος του Πίνακα Δ.3. Οι τιμές των PSR και PSr είναι ετερόσημες, το ποια είναι θετική και ποια αρνητική εξαρτάται από τη φορά με την οποία θέλουμε να τμήσει η τροχιά την επιφάνεια Poincaré. Γι' αυτό στον πίνακα Δ.3 σημειώνουμε τις απόλυτες τιμές |PSR| και |PSr|.

Οταν μεταβάλλεται μια παράμετρος ενός δυναμικού συστήματος μεταβάλλεται και η θέση των περιοδικών τροχιών του. Χαρακτηριστική καμπύλη μιας περιοδικής τροχιάς ονομάζεται η καμπύλη, η οποία περιγράφει τη μεταβολή μιας συντεταγμένης της τροχιάς συναρτήσει της παραμέτρου. Στο σχήμα Δ.14 έχουμε το διάγραμμα χαρακτηριστικών καμπυλών για τις 6 πρώτες μ.κ.π.τ. . Με κατάλληλο πρόγραμμα στον υπολογιστή ακολουθούμε κάθε μ.κ.π.τ. καθώς η ενέργεια E του συστήματος μεταβάλλεται και βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της τροχιάς με την επιφάνεια Poincaré όπως έχουμε αναφέρει. Στο σχήμα Δ.14 φαίνονται οι συντεταγμένες SR αυτών των σημείων. Ανάλογα σχήματα έχουμε και για τις άλλες τρεις συντεταγμένες (Sr, |PSR|, |PSr|) αυτών των σημείων. Παρατηρούμε ότι κάθε μ.κ.π.τ. υπάρχει από κάποια τιμή της ενέργειας και πάνω. Η μ.κ.π.τ. 1 εμφανίζεται σε μικρότερη ενέργεια από όλες τις άλλες τροχιές. Στη συνέχεια κάθε νέα μ.κ.π.τ. εμφανίζεται σε τιμή της ενέργειας μεγαλύτερη από την τιμή εμφάνισης της προηγούμενης της. Οι διαφορές όμως των τιμών αυτών συνεχώς μειώνονται όπως φαίνεται στο σχήμα Δ.14. Οι αρχικές συνθήκες των 6 μ.κ.π.τ. τη στιγμή της "γέννησης" τους δίνονται στον πίνακα Δ.4. Στο σχήμα Δ.14 δεν έχουμε ακολουθήσει τις διάφορες μ.κ.π.τ. για όλες τις τιμές της ενέργειας για τις οποίες υπάρχουν γιατί αυτή η διαδικασία είναι πολύ χρονοβόρα. Όσο μάλιστα αυξάνει η τάξη της μ.κ.π.τ. η παρακολούθησή της γίνεται υπολογιστικά όλο και πιο δύσκολη. Τα σημεία "γέννησης" των διαφόρων μ.κ.π.τ. βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη η οποία σημειώνεται στο σχήμα Δ.14. Ανάλογες καμπύλες έχουμε και στα διαγράμματα χαρακτηριστικών ως προς τις άλλες τρεις συντεταγμένες Sr, |PSR|, |PSr|. Οι καμπύλες αυτές δίνονται προσεγγιστικά από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} SR &= 10938 \cdot E^2 - 81,8294 \cdot E + 4,06953 \\ Sr &= 11504,1 \cdot E^2 - 86,0642 \cdot E + 1,76644 \\ |PSR| &= 96,7492 \cdot E + 9,71827 \\ |PSr| &= 43275,8 \cdot E^2 - 263,249 \cdot E + 8,46211 \end{aligned} \quad (\Delta.5.3.1).$$

Παρ' όλα αυτά δε μπορούμε να προβλέψουμε την τιμή της ενέργειας για την οποία θα εμφανιστεί η επόμενη μ.κ.π.τ. ούτε τις αρχικές της συνθήκες, γιατί τα δεδομένα μας (πίνακας Δ.4) είναι σχετικά λίγα.

Στο σχήμα Δ.15 έχουμε σχεδιάσει την τιμή της περιόδου T κάθε μ.κ.π.τ. ως συνάρτηση της ενέργειας E. Βλέπουμε ότι η περίοδος κάθε μ.κ.π.τ. τη στιγμή της γέννησης της, αυξάνει με την αύξηση της τάξης της μ.κ.π.τ., όπως φαίνεται και από τα στοιχεία του πίνακα Δ.4. Αυτή η αύξηση είναι σχεδόν γραμμική. Προσεγγιστικά η τιμή της περιόδου T κάθε μ.κ.π.τ. τάξης i τη στιγμή της γέννησης της, δίνεται με καλή ακρίβεια από τη σχέση :

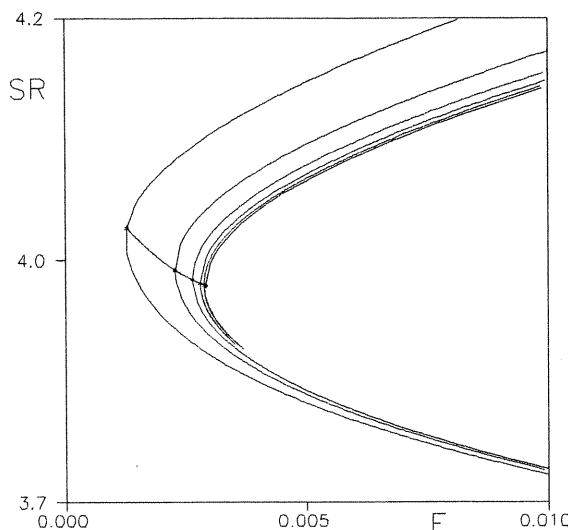
$$T = 372,861 \cdot i + 618,434$$

(Δ.5.3.2),

όπως φαίνεται και στο σχήμα Δ.16.

i	T	SR	Sr	PSR	PSr
1	821,985082	4,195593	1,899025	10,447844	9,404767
2	1206,149216	4,131454	1,831567	10,455187	9,280855
3	1570,132402	4,110916	1,809966	10,457659	9,233523
4	1925,909606	4,102147	1,800744	10,458724	9,212026
5	2277,688335	4,097929	1,796307	10,459238	9,201395
6	2627,329272	4,095768	1,794034	10,459501	9,195874
7	2975,764939	4,094620	1,792827	10,459641	9,192920
8	3323,499475	4,093996	1,792171	10,459717	9,191309
9	3670,818677	4,093652	1,791809	10,459759	9,190419
Δ					
1	-384,164134	0,064139	0,067458	-0,007343	0,123912
2	-363,983186	0,020538	0,021601	-0,002472	0,047332
3	-355,777204	0,008768	0,009222	-0,001065	0,021498
4	-351,778729	0,004218	0,004437	-0,000514	0,010631
5	-349,640937	0,002161	0,002273	-0,000263	0,005521
6	-348,435667	0,001148	0,001208	-0,000140	0,002954
7	-347,734536	0,000624	0,000656	-0,000076	0,001611
8	-347,319201	0,000344	0,000361	-0,000042	0,000889
$\Lambda\Delta$					
1	1,055445	3,122950	3,122950	2,970748	2,617942
2	1,023065	2,342334	2,342334	2,321211	2,201727
3	1,011366	2,078578	2,078578	2,073420	2,022137
4	1,006114	1,951952	1,951952	1,950274	1,925698
5	1,003459	1,881963	1,881964	1,881315	1,868782
6	1,002016	1,840581	1,840581	1,840292	1,833664
7	1,001196	1,815285	1,815281	1,815117	1,811555
$\Delta\Lambda\Delta$					
1	0,032380	0,780616	0,780616	0,649536	0,416216
2	0,011698	0,263755	0,263756	0,247792	0,179590
3	0,005252	0,126626	0,126626	0,123146	0,096439
4	0,002655	0,069989	0,069988	0,068959	0,056916
5	0,001443	0,041382	0,041383	0,041023	0,035117
6	0,000820	0,025296	0,025300	0,025175	0,022110

Πίνακας Δ.3 : Στοιχεία για τις αρχικές συνθήκες των 9 μ.κ.π.τ. του συστήματος FH₂ για ενέργεια E=0,008. Στο πρώτο μέρος του πίνακα δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου τομής της κάθε τροχιάς με την επιφάνεια τομής Poincaré, το οποίο έχει τη μακρότερη δυνατή τιμή ως προς SR. Οι ορμές PSR και PSr είναι ετερόσημες ανάλογα με τη φορά με την οποία τέμνουν οι τροχιές την επιφάνεια Poincaré και γ' αυτό δίνουμε τις απόλυτες τιμές τους. Για κάθε τροχιά δίνεται επίσης η τιμή της περιόδου T. Στο δεύτερο μέρος έχουμε τις διαφορές Δ δύο διαδοχικών τιμών του πρώτου μέρους του πίνακα. Στο τρίτο μέρος έχουμε τους λόγους ΛΔ δύο διαδοχικών τιμών των στηλών του δεύτερου μέρους και τέλος τις διαφορές δύο διαδοχικών λόγων ΔΛΔ.



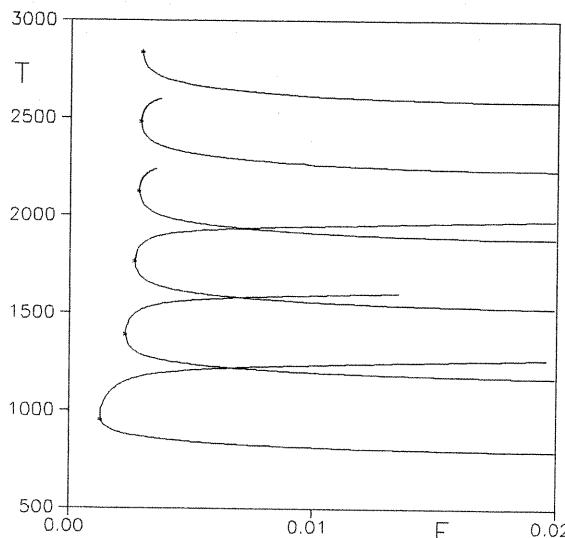
Σχήμα Δ.14 : Διάγραμμα χαρακτηριστικών των 6 πρώτων μ.κ.π.τ. του σχήματος Δ.13 όπου σχεδιάζουμε τη συντεταγμένη SR του σημείου τομής κάθε τροχιάς με την επιφάνεια τομής Poincaré, ως συνάρτηση της ενέργειας E του συστήματος. Η ενέργεια "γέννησης" κάθε μ.κ.π.τ. αυξάνει με την αύξηση της τάξης της. Τα σημεία "γέννησης" των μ.κ.π.τ. σημειώνονται με αστεράκι στο σχήμα και βρίσκονται πάνω στην καμπύλη $SR=10938 \cdot E^2 - 81,8294 \cdot E + 4,06953$ η οποία σχεδιάζεται στο σχήμα. Οι μ.κ.π.τ. δεν έχουν ακολουθηθεί για όλες τις τιμές της ενέργειας για τις οποίες υπάρχουν (κάτω κλάδοι των χαρακτηριστικών καμπύλων).

i	E	T	SR	Sr	PSR	PSr
1	0,001271	951,787366	3,983211	1,675653	9,841151	8,197512
2	0,002274	1387,488332	3,939691	1,629881	9,938584	8,085914
3	0,002639	1762,688887	3,930259	1,619961	9,973659	8,070882
4	0,002800	2124,600797	3,926313	1,615810	9,989099	8,064821
5	0,002877	2480,482723	3,924546	1,613953	9,996552	8,062553
6	0,002917	2833,635795	3,923658	1,613018	10,000323	8,061409

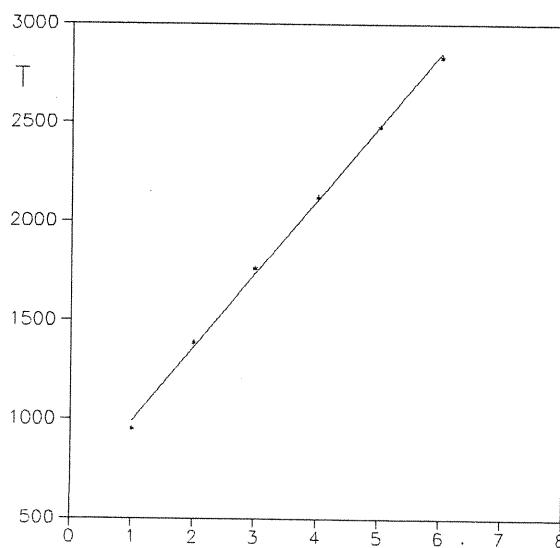
Πίνακας Δ.4 : Αρχικές συνθήκες SR, Sr, |PSR|, |PSr| των 6 πρώτων μ.κ.π.τ. του σχήματος Δ.13 την στιγμή της "γέννησης" τους. Σημειώνουμε την τάξη i κάθε μ.κ.π.τ. την ενέργεια γέννησης της E και την περίοδο της T.

Στο σχήμα Δ.14 βλέπουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες κάθε μ.κ.π.τ. παρουσιάζουν δύο κλάδους. Στον έναν κλάδο η περιοδική τροχιά γεννιέται απλά ασταθής και με την αύξηση της ενέργειας γίνεται κάποια στιγμή διπλά ασταθής. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στους πάνω κλάδους των χαρακτηριστικών καμπυλών του σχήματος Δ.14, δηλαδή η τιμή της συντεταγμένης SR αυξάνει με την αύξηση της ενέργειας, τουλάχιστον για τις τιμές της ενέργειας που φαίνονται στο σχήμα. Αντίθετα η αντίστοιχη περίοδος T της τροχιάς, αρχικά τουλάχιστον, μειώνεται με την αύξηση της ενέργειας επομένως αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στους κάτω κλάδους των καμπυλών του σχήματος Δ.15. Η μορφολογία των τροχιών φαίνεται στο σχήμα Δ.13 αφού οι τροχιές αυτού του σχήματος προέρχονται από τον πάνω κλάδο των καμπυλών του σχήματος Δ.14 για $E=0,008$. Όσο αυξάνει η τιμή της ενέργειας η μορφολογία των τροχιών αυτού του κλάδου παραμένει η ίδια αλλά το μήκος της τροχιάς αυξάνει και η τροχιά μετατοπίζεται σε περιοχές του επιπέδου SR Sr με μεγαλύτερες τιμές για τα SR, Sr. Αυτό φαίνεται καθαρά στα σχήματα Δ.17α και β στα οποία σχεδιάζουμε 5 τροχιές για τις μ.κ.π.τ. 1 και 3 αντίστοιχα. Οι τροχιές 1 και 2 αντιστοιχούν στον κλάδο που μόλις περιγράψαμε και σε ενέργειες 0,015 και 0,005 αντίστοιχα στην περίπτωση της μ.κ.π.τ. 1, και σε ενέργειες 0,03 και 0,01 αντίστοιχα για

την μ.κ.π.τ. 3. Οι τροχιές 3 και στα δύο σχήματα αντιστοιχούν στις ενέργειες στις οποίες "γεννιούνται" οι δύο μ.κ.π.τ.. Αυτές οι τιμές της ενέργειας δίνονται στον πίνακα Δ.4.



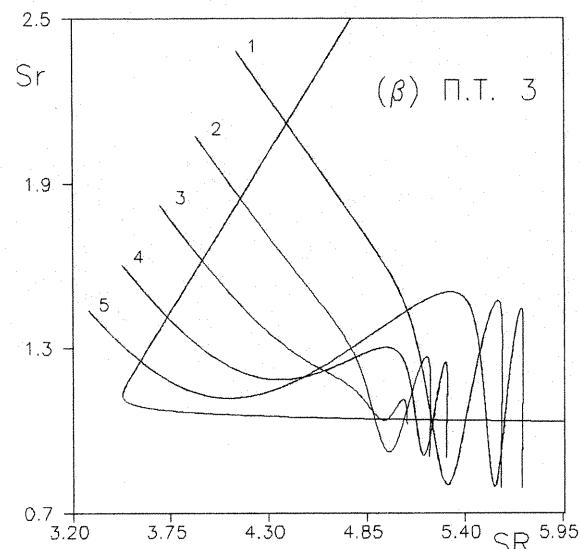
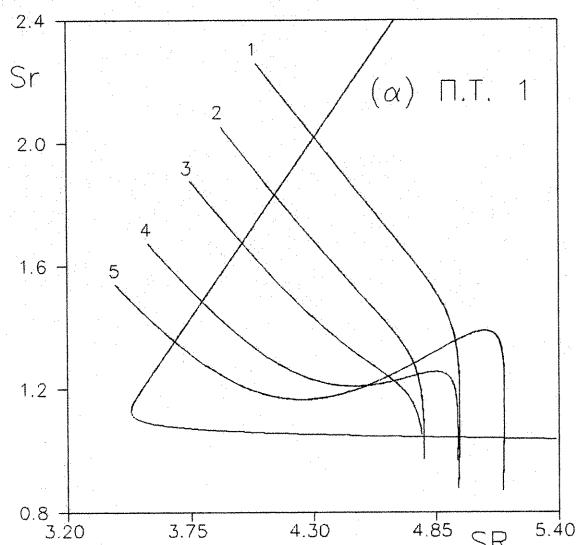
Σχήμα Δ.15 : Η περίοδος T των 6 πρώτων μ.κ.π.τ. του σχήματος Δ.13 ως συνάρτηση της ενέργειας E . Τα σημεία γέννησης των μ.κ.π.τ. σημειώνονται με αστεράκι στο σχήμα. Οι μ.κ.π.τ. δεν έχουν ακολουθηθεί για δλες τις τιμές της ενέργειας για τις οποίες υπάρχουν (επάνω κλάδοι των καμπυλών).



Σχήμα Δ.16 : Η περίοδος T τη στιγμή της γέννησης των 6 πρώτων μ.κ.π.τ. του σχήματος Δ.13, ως συνάρτηση της τάξης i της μ.κ.π.τ.. Έχουμε μια σχεδόν γραμμική αύξηση της περιόδου αφού τα σημεία του σχήματος προσεγγίζονται ικανοποιητικά από την ευθεία με εξίσωση $T = 372,861 \cdot i + 618,434$.

Στον άλλο κλάδο κάθε μ.κ.π.τ. είναι αρχικά ευσταθής αλλά μια πολύ μικρή αύξηση της ενέργειας κάνει την τροχιά απλά ασταθή. Καθώς αυξάνει η ενέργεια η τροχιά γίνεται διπλά ασταθής, μετά ξανά απλά ασταθής και γενικά παραμένει ασταθής εναλλάσσοντας το είδος της αστάθειας της μεταξύ απλής και διπλής αστάθειας. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στον κάτω κλάδο των καμπυλών του σχήματος Δ.14, δηλαδή η τιμή του SR μειώνεται με την αύξηση της ενέργειας, για τιμές της ενέργειας κοντά στην ενέργεια γέννησης κάθε μ.κ.π.τ., και αντίστοιχα στον πάνω κλάδο των καμπυλών του σχήματος

Δ.15, όπου η περίοδος Τ αρχικά αυξάνει με την αύξηση της τιμής της ενέργειας. Μορφολογικά οι τροχιές αυτού του κλάδου διαφέρουν από αυτές του σχήματος Δ.13. Παρά το ότι και αυτές κάνουν ταλαντώσεις στο κανάλι $H_2 + F$ το τμήμα της τροχιάς στην περιοχή του άλλου καναλιού παρουσιάζει μια σημαντική καμπύλωση. Αυτό φαίνεται καθαρά στα σχήματα Δ.17a και β στα οποία οι τροχιές 4 και 5 που ανήκουν στον κάτω κλάδο του σχήματος Δ.14, έχουν την ίδια ενέργεια με τις τροχιές 2 και 1 αντίστοιχα, που ανήκουν στον πάνω κλάδο του σχήματος Δ.14, σε κάθε μια περίπτωση. Όπως φαίνεται από αυτά τα σχήματα όσο αυξάνει η ενέργεια το μήκος των τροχιών και των δύο κλάδων του σχήματος Δ.14, αυξάνει και οι ταλαντώσεις στο κανάλι $H_2 + F$ μετακινούνται προς μεγαλύτερες τιμές του SR.



Σχήμα Δ.17 : Μορφολογία των α) μ.κ.π.τ. 1 για ενέργειες $E=0,015$ (τροχιές 1,5) και $E=0,005$ (τροχιές 2,4) και β) μ.κ.π.τ. 3 για ενέργειες $E=0,03$ (τροχιές 1,5) και $E=0,01$ (τροχιές 2,4). Οι τροχιές 3 αντιστοιχούν στην ενέργεια γέννησης κάθε μ.κ.π.τ., η οποία δίνεται στον πίνακα Δ.4. Οι τροχιές 1 και 2 αντιστοιχούν στον πάνω κλάδο της χαρακτηριστικής καμπύλης του σχήματος Δ.14 για κάθε μ.κ.π.τ., ενώ οι 4 και 5 στον κάτω κλάδο.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να βρούμε μια διαδικασία, η οποία θα μας επιτρέπει να προβλέψουμε τις αρχικές συνθήκες μιας μ.κ.π.τ. τάξης i αν γνωρίζουμε όλες τις προηγούμενες μ.κ.π.τ. μικρότερης τάξης. Κάτι τέτοιο είναι σχετικά δύσκολο αν προσπαθήσουμε να βρούμε τις αρχικές συνθήκες μιας μ.κ.π.τ. τη στιγμή της "γέννησης" της, και αυτό γιατί όχι μόνο οι αρχικές της συνθήκες είναι διαφορετικές από αυτές των προηγούμενων μ.κ.π.τ., αλλά αλλάζει και η τιμή της ενέργειας E στην οποία αυτή γεννιέται, όπως φαίνεται από τα στοιχεία του πίνακα Δ.4. Γι' αυτό θα προσπαθήσουμε να κάνουμε πρόβλεψη για τις αρχικές συνθήκες μιας μ.κ.π.τ. για μια συγκεκριμένη σταθερή τιμή της ενέργειας E, η οποία όμως να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να έχουν εμφανιστεί όλες οι μ.κ.π.τ. .

Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση στην οποία $E=0,008$ όπου έχουμε βρει τις 9 πρώτες μ.κ.π.τ. που φαίνονται στο σχήμα Δ.13. Όπως έχουμε αναφέρει οι αρχικές συνθήκες αυτών των μ.κ.π.τ., καθώς και η τιμή της περιόδου κάθε μ.κ.π.τ. σημειώνονται στο πρώτο μέρος του πίνακα Δ.3. Για τις αρχικές συνθήκες $A\Sigma_j$, $j=1,2,3,4$ όπου $A\Sigma_1 \equiv SR$, $A\Sigma_2 \equiv Sr$, $A\Sigma_3 \equiv |PSR|$ και $A\Sigma_4 \equiv |PSr|$ υπολογίζουμε τις διαφορές $\Delta_{j,i}$ δύο διαδοχικών τιμών :

$$\Delta_{j,i} = A\Sigma_{j,i} - A\Sigma_{j,i+1}, \quad j=1,2,3,4, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (\Delta.5.3.3),$$

όπου ο δείκτης i αναφέρεται στην τάξη της μ.κ.π.τ. . Αυτά τα αποτελέσματα καθώς και οι αντίστοιχες τιμές για την περίοδο T ($\Delta T_i = T_i - T_{i+1}$, $i=1,2,\dots,8$) βρίσκονται στο δεύτερο μέρος του πίνακα Δ.3. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους λόγους των διαφορών (Δ.5.3.3) :

$$\Lambda\Delta_{j,i} = \frac{\Delta_{j,i}}{\Delta_{j,i+1}}, \quad j=1,2,3,4, \quad i=1,2,\dots,7 \quad (\Delta.5.3.4),$$

τους οποίους σημειώνουμε στο τρίτο μέρος του πίνακα Δ.3. Στο τελευταίο μέρος αυτού του πίνακα σημειώνουμε τις διαφορές των λόγων (Δ.5.3.4) :

$$\Delta\Lambda\Delta_{j,i} = \Lambda\Delta_{j,i} - \Lambda\Delta_{j,i+1}, \quad j=1,2,3,4, \quad i=1,2,\dots,6 \quad (\Delta.5.3.5).$$

Από τα στοιχεία του πίνακα Δ.3 φαίνεται ότι οι αρχικές συνθήκες $A\Sigma_j$, $j=1,2,3,4$ των διαφόρων μ.κ.π.τ. τείνουν προς κάποια τιμή καθώς η τάξη των μ.κ.π.τ. αυξάνει. Αυτό το αντίλαμβάνεται κανείς και από το γεγονός ότι οι διαφορές των τιμών των αρχικών συνθηκών $\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,8$ φαίνεται να τείνουν στο 0. Για να κάνουμε όμως μια όσο γίνεται πιο ακριβή πρόβλεψη για την αρχική συνθήκη της επόμενης μ.κ.π.τ. υπολογίζουμε τους λόγους των διαφορών $\Lambda\Delta_{j,i}$ (Δ.5.3.4) και τις διαφορές αυτών των λόγων $\Delta\Lambda\Delta_{j,i}$ (Δ.5.3.5). Οπως γίνεται αντιληπτό από τον πίνακα Δ.3 οι $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,7$ φαίνεται να τείνουν προς κάποια συγκεκριμένη τιμή καθώς η τάξη των μ.κ.π.τ. αυξάνει, η οποία, επιπλέον φαίνεται να είναι σχεδόν ίδια για όλες τις συντεταγμένες. Αυτό φαίνεται καθαρά και στο σχήμα Δ.18a στο οποίο φαίνονται οι τιμές των $\Lambda\Delta_{j,i}$ για όλες τις συντεταγμένες, ως συνάρτηση της τάξης i. Παρατηρούμε ότι οι λόγοι των διαφορών των αρχικών συνθηκών πρακτικά ταυτίζονται για τις συντεταγμένες SR και Sr για όλες τις τιμές του i. Αντίθετα οι αντίστοιχες τιμές για τα |PSR| και |PSr| αρχικά διαφέρουν αρκετά αλλά καθώς το i αυξάνει τείνουν να ταυτιστούν και αυτές με τις τιμές για τις συντεταγμένες SR και Sr. Αν λοιπόν οι τιμές των $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,7$ τείνουν σε κάποιο όριο καθώς $i \rightarrow +\infty$, όπως φαίνεται από τα στοιχεία του πίνακα Δ.3 και το σχήμα Δ.18a, θα πρέπει οι διαδοχικές διαφορές αυτών των τιμών να τείνουν στο 0 καθώς $i \rightarrow +\infty$. Στο σχήμα Δ.19 έχουμε σχεδιάσει τις τιμές των διαφορών δύο διαδοχικών λόγων, μόνο για την περίπτωση των λόγων που προκύπτουν από τη συντεταγμένη SR. Φαίνεται καθαρά ότι οι τιμές $\Delta\Lambda\Delta_{1,i}$ μειώνονται καθώς το i αυξάνει. Ανάλογα σχήματα ισχύουν και στην περίπτωση των άλλων συντεταγμένων. Προσπαθώντας να προσεγγίσουμε αριθμητικά τα σημεία του σχήματος Δ.19 με μια απλή συναρτησιακή σχέση καταλήξαμε στη σχέση :

$$\Delta\Lambda\Delta_{1,i} = 0,614948 \cdot e^{-0,535727i}, \quad i \geq 3 \quad (\Delta.5.3.6).$$

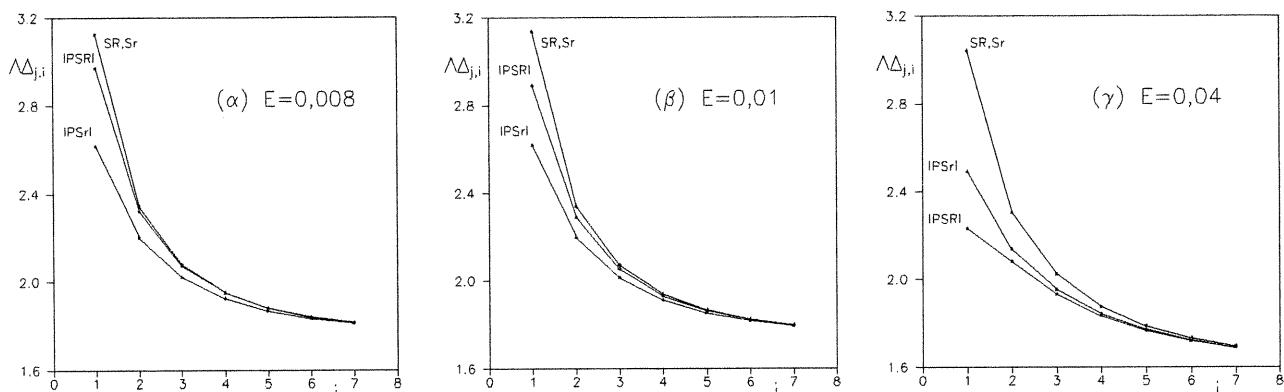
Οπως φαίνεται και στο σχήμα Δ.19 η παραπάνω συναρτησιακή σχέση βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με τα αριθμητικά δεδομένα για $i \geq 3$. Οι αριθμητικές τιμές των δύο πρώτων σημείων του σχήματος Δ.19 διαφέρουν αρκετά από τις υπόλοιπες, με αποτέλεσμα, οποιαδήποτε προσπάθεια εύρεσης μιας συναρτησιακής σχέσης η οποία να ισχύει και γι' αυτά τα δύο σημεία, να μη δίνει καλή συμφωνία με τα αριθμητικά δεδομένα. Προσπαθώντας λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία του σχήματος Δ.19 στην εύρεση μιας προσεγγιστικής συναρτησιακής σχέσης και ταυτόχρονα να έχουμε όσο το δυνατόν καλύτερη συμφωνία, με τα αριθμητικά δεδομένα, καταλήξαμε στη σχέση (Δ.5.3.6). Ένας ακόμα λόγος για την επιλογή της παραπάνω σχέσης είναι ότι αυτή δίνει τις καλύτερες δυνατές προσεγγίσεις των αρχικών συνθηκών των μ.κ.π.τ. μέσω

μιας διαδικασίας η οποία θα αναπτυχθεί στη συνέχεια. Σημειώνουμε επίσης ότι η συνάρτηση (Δ.5.3.6) ικανοποιεί την απαίτηση $\lim_{i \rightarrow +\infty} \Delta\Delta_{1,i} = 0$.

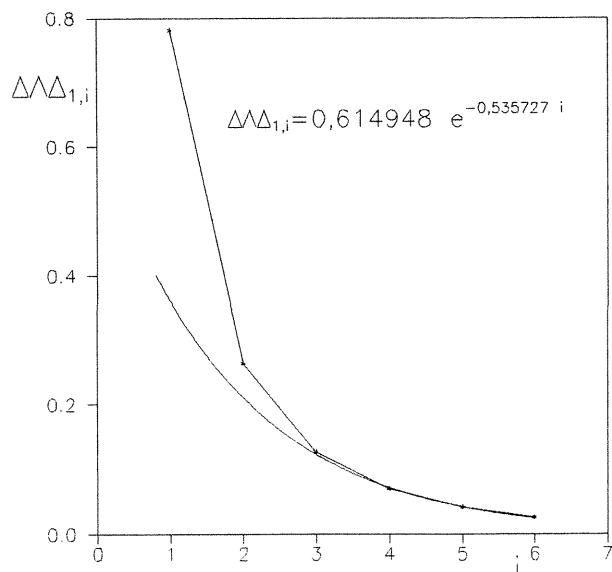
Με μια ανάλογη διαδικασία προσεγγίζουμε τις αριθμητικές τιμές των $\Delta\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=3,4,5,6$ για όλες τις συντεταγμένες με εκθετικές συναρτήσεις της μορφής :

$$\Delta\Delta_{j,i} = \alpha \cdot e^{-\beta i}, \quad i \geq 3, \quad j=1,2,3,4 \quad (\Delta.5.3.7),$$

όπου α και β θετικές σταθερές, οι οποίες αναφέρονται στο πρώτο μέρος του πίνακα Δ.5 για κάθε συντεταγμένη.



Σχήμα Δ.18 : Οι λόγοι των διαφορών δύο διαδοχικών αρχικών συνθηκών των 9 μ.κ.π.τ. $\Delta\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,7$, ως συνάρτηση του δείκτη i όταν α) $E=0,008$ β) $E=0,01$ και γ) $E=0,04$. Τα σχήματα έγιναν με βάση τα στοιχεία του τρίτου μέρους των πινάκων Δ.3, Δ.9 και Δ.10 αντίστοιχα.



Σχήμα Δ.19 : Οι τιμές των $\Delta\Delta_{1,i}$, $i=1,2,\dots,6$ οι οποίες αντιστοιχούν στη συντεταγμένη SR για $E=0,008$ (Πίνακας Δ.3) ως συνάρτηση του δείκτη i . Τα τέσσερα τελευταία σημεία του σχήματος προσεγγίζονται πολύ καλά από μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $\Delta\Delta_{1,i} = 0,614948 \cdot e^{-0,535727 i}$.

Γνωρίζοντας τις τιμές των διαφορών των λόγων $\Delta\Lambda_{j,i}$ για $i \geq 3$ μέσω των συναρτησιακών σχέσεων της μορφής ($\Delta.5.3.7$) και θεωρώντας γνωστή την τιμή $\Lambda\Delta_{j,3}$, $j=1,2,3,4$ και ίση με την αριθμητική τιμή που έχουμε υπολογίσει στον πίνακα $\Delta.3$, μπορούμε εφαρμόζοντας διαδοχικά τη σχέση ($\Delta.5.3.5$) να υπολογίσουμε όλους τους επόμενους λόγους διαφορών $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i \geq 4$. Συγκεκριμένα για $i \geq 4$ έχουμε :

$$\Lambda\Delta_{j,i} = \Lambda\Delta_{j,3} - \alpha \cdot e^{-3\beta} - \alpha \cdot e^{-4\beta} - \dots - \alpha \cdot e^{-(i-1)\beta}, \quad j=1,2,3,4 \quad (\Delta.5.3.8).$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και στη μορφή :

$$\begin{aligned} \Lambda\Delta_{j,i} &= \Lambda\Delta_{j,3} - \alpha \cdot e^{-3\beta} (1 + e^{-\beta} + e^{-2\beta} + \dots + e^{-(i-4)\beta}) \Rightarrow \\ \Lambda\Delta_{j,i} &= \Lambda\Delta_{j,3} - \alpha \cdot e^{-3\beta} \frac{e^{-(i-3)\beta} - 1}{e^{-\beta} - 1} \end{aligned} \quad (\Delta.5.3.9).$$

Η σχέση ($\Delta.5.3.9$) μας επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό του $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i \geq 4$ χρησιμοποιώντας την αριθμητική τιμή του $\Lambda\Delta_{j,3}$, $j=1,2,3,4$ η οποία αναφέρεται στον πίνακα $\Delta.3$ και τις τιμές των σταθερών α και β που αντιστοιχούν στην j συντεταγμένη, οι οποίες αναφέρονται στον πίνακα $\Delta.5$. Από τη σχέση ($\Delta.5.3.9$) βρίσκουμε επίσης ότι :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda\Delta_{j,i} = \Lambda\Delta_{j,3} + \frac{\alpha \cdot e^{-3\beta}}{e^{-\beta} - 1}, \quad j=1,2,3,4 \quad (\Delta.5.3.10).$$

Επομένως οι τιμές των λόγων των αρχικών συνθηκών τείνουν σε συγκεκριμένο αριθμό όπως αναμέναμε από τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα $\Delta.3$. Η τιμή του ορίου για κάθε συντεταγμένη υπολογίζεται μέσω της σχέσης ($\Delta.5.3.10$) και αναφέρεται στο πρώτο μέρος του πίνακα $\Delta.6$. Όπως φαίνεται από αυτές τις τιμές τα τέσσερα όρια πρακτικά ταυτίζονται όπως αναμέναμε από το σχήμα $\Delta.18a$. Αυτό το γεγονός αποτελεί μια έμμεση επιβεβαίωση ότι η συναρτησιακή προσέγγιση ($\Delta.5.3.7$) που χρησιμοποιήσαμε είναι ικανοποιητική. Συγκεκριμένα έχουμε :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda\Delta_{j,i} \approx 1,78, \quad j=1,2,3,4 \quad (\Delta.5.3.11).$$

Μια ακόμα επιβεβαίωση της ορθότητας της προσέγγισης ($\Delta.5.3.7$) είναι ότι περιγράφει και άλλα μορφολογικά χαρακτηριστικά του σχήματος $\Delta.18a$. Είναι φανερό ότι όσο αυξάνει η τιμή της θετικής σταθεράς β στη σχέση ($\Delta.5.3.7$) τόσο συντομότερα η τιμή $\Delta\Lambda_{j,i}$ σχεδόν μηδενίζεται άρα και ο $\Lambda\Delta_{j,i}$ παίρνει πρακτικά την οριακή του τιμή. Στο σχήμα $\Delta.18a$ οι καμπύλες που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες SR και Sr είναι πολύ κοντά από την αρχή, με αποτέλεσμα και οι αντίστοιχες τιμές της σταθεράς β να είναι σχεδόν ίσες (Πίνακας $\Delta.5$). Η καμπύλη που αντιστοιχεί στο $|PSR|$ ταυτίζεται με την καμπύλη των SR και Sr σε μικρότερες τιμές του i απ' ότι η καμπύλη που αντιστοιχεί στο $|PSr|$, με αποτέλεσμα η τιμή του β για το $|PSR|$ να είναι μεγαλύτερη από αυτή για το $|PSr|$ (Πίνακας $\Delta.5$).

Έχοντας υπολογίσει μέσω της ($\Delta.5.3.9$) τις τιμές των $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i \geq 4$ και θεωρώντας δεδομένη την τιμή $\Delta_{j,4}$, $j=1,2,3,4$ από τα στοιχεία του πίνακα $\Delta.3$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i \geq 5$ μέσω της ($\Delta.5.3.4$). Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές

και έχοντας ως δεδομένο τις αρχικές συνθήκες της πέμπτης μ.κ.π.τ. από τον πίνακα Δ.3 υπολογίζουμε τις αρχικές συνθήκες των επόμενων μ.κ.π.τ. χρησιμοποιώντας την (Δ.5.3.3).

	SR	Sr	PSR	PSr
	E=0,008	FH ₂		
α	0,614948	0,614832	0,586157	0,412399
β	0,535727	0,535675	0,528194	0,490153
	E=0,01	FH ₂		
α	0,619662	0,619682	0,543890	0,418690
β	0,528453	0,528459	0,510874	0,483227
	E=0,04	FH ₂		
α	0,553343	0,560448	0,327917	0,359922
β	0,451791	0,455247	0,394899	0,397651

Πίνακας Δ.5 : Τιμές των παραμέτρων α και β των συναρτήσεων $\alpha \cdot e^{-\beta^i}$, $i \geq 3$, οι οποίες προσεγγίζουν τις τιμές $\Delta \Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,6$ για κάθε συντεταγμένη SR, Sr, |PSR| και |PSr| και για ενέργειες E=0,008, E=0,01 και E=0,04. Οι τιμές των $\Delta \Delta_{j,i}$ σημειώνονται στους πίνακες Δ.3, Δ.9 και Δ.10 αντίστοιχα, για κάθε ενέργεια.

OPIA				
SR	Sr	PSR	PSr	
	E=0,008	FH ₂		
1,781373	1,781361	1,780530	1,777529	
	E=0,01	FH ₂		
1,761113	1,761111	1,759039	1,756932	
	E=0,04	FH ₂		
1,629944	1,631212	1,624788	1,620496	

Πίνακας Δ.6 : Τα όρια στα οποία τείνουν οι ποσότητες $\Delta \Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,7$ όταν $i \rightarrow +\infty$ όπως υπολογίζονται από τη σχέση (Δ.5.3.10), για κάθε μια συντεταγμένη SR,Sr,|PSR| και |PSr| και ενέργειες E=0,008, E=0,01 και E=0,04 στο σύστημα FH₂. Παρατηρούμε ότι τα όρια είναι πολύ κοντά για όλες τις συντεταγμένες για συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας E.

i	SR	Sr	PSR	PSr
6	4,095772	1,794038	10,459501	9,195879
7	4,094626	1,792833	10,459641	9,192928
8	4,094004	1,792178	10,459717	9,191319
9	4,093661	1,791818	10,459759	9,190431
10	4,093471	1,791618	10,459782	9,189937
11	4,093365	1,791506	10,459795	9,189662
12	4,093306	1,791444	10,459802	9,189507
13	4,093273	1,791409	10,459806	9,189421
14	4,093254	1,791389	10,459808	9,189372
15	4,093244	1,791378	10,459810	9,189345

Πίνακας Δ.7 : Οι αρχικές συνθήκες των μ.κ.π.τ. 6 ως και 15 για το σύστημα FH₂ με E=0,008, οι οποίες υπολογίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση (Δ.5.3.7) η οποία προσεγγίζει τις τιμές των $\Delta \Delta_{j,i}$, $i \geq 3$, τις πραγματικές τιμές των $\Delta \Delta_{j,3}$, $\Delta_{j,4}$, $j=1,2,3,4$ και τις πραγματικές αρχικές συνθήκες της μ.κ.π.τ. 5. Συγκρίνοντας αυτές τις αρχικές συνθήκες για τις μ.κ.π.τ. 6 έως και 9, με τις πραγματικές τιμές του πίνακα Δ.3, παρατηρούμε μια πολύ καλή συμφωνία ανάμεσά τους.

Οι αρχικές συνθήκες των μ.κ.π.τ. τάξης 6 ως και 15, οι οποίες υπολογίστηκαν με την παραπάνω διαδικασία, φαίνονται στον πίνακα Δ.7. Συγκρίνοντας τις θεωρητικές τιμές των αρχικών συνθηκών των μ.κ.π.τ. 6 έως 9 του πίνακα Δ.7, με τις πραγματικές τιμές, οι οποίες αναφέρονται στον πίνακα Δ.3, παρατηρούμε ότι αυτές διαφέρουν στο πέμπτο ή έκτο δεκαδικό ψηφίο. Αυτή η πολύ καλή συμφωνία θεωρητικών και αριθμητικών τιμών, δείχνει ότι η σχέση (Δ.5.3.7), καθώς και η διαδικασία που ακολουθήσαμε στη συνέχεια για το θεωρητικό υπολογισμό των αρχικών συνθηκών των μ.κ.π.τ., είναι ικανοποιητική.

Ο καλύτερος έλεγχος για τη σπουδαιότητα αυτής της διαδικασίας είναι η δυνατότητα της να προβλέψει τις αρχικές συνθήκες μιας μ.κ.π.τ., η οποία δεν έχει εντοπιστεί αριθμητικά. Πράγματι χρησιμοποιώντας ως πιθανές αρχικές συνθήκες για τη μ.κ.π.τ. 10 τις τιμές του πίνακα Δ.7, το πρόγραμμα το οποίο έχουμε αναπτύξει στον υπολογιστή για την εύρεση των περιοδικών τροχιών του συστήματος FH_2 , εντόπισε τη μ.κ.π.τ. 10 χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Η επιτυχία του προγράμματος στον άμεσο υπολογισμό της μ.κ.π.τ. 10 οφείλεται στην καλή αρχική εκτίμηση των αρχικών συνθηκών της τροχιάς, η οποία έγινε μέσω της ημιεμπειρικής διαδικασίας που αναπτύξαμε ως τώρα. Οι πραγματικές αρχικές συνθήκες της μ.κ.π.τ. 10 αναφέρονται στον πίνακα Δ.8, απ' όπου βλέπουμε ότι διαφέρουν από τις προσεγγιστικές τιμές του πίνακα Δ.7 το πολύ μέχρι 10^{-5} .

i	T	SR	Sr	PSR	PSr
10	4017,889400	4,093461	1,791608	10,459782	9,189925
10	4000,511709	4,126637	1,826501	10,633751	9,442923
10	4096,669944	4,483359	2,201682	12,958637	12,101713

Πίνακας Δ.8 : Οι πραγματικές αρχικές συνθήκες SR, Sr, |PSR|, |PSr| καθώς και η τιμή της περιόδου T για τη μ.κ.π.τ. 10 του συστήματος FH_2 για $E=0,008$, $E=0,01$ και $E=0,04$. Οι τιμές αυτές για $E=0,008$, διαφέρουν από τις εμπειρικές τιμές του πίνακα Δ.7 το πολύ κατά 10^{-5} .

Επαναλαμβάνοντας τώρα την παραπάνω διαδικασία, χρησιμοποιώντας όμως και τις πραγματικές τιμές της μ.κ.π.τ. 10, μπορούμε να κάνουμε μια επιτυχή πρόβλεψη για τις αρχικές συνθήκες της επόμενης μ.κ.π.τ., κ.ο.κ.. Πρακτικά αυτή η διαδικασία δε μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, λόγω των περιορισμών στην αριθμητική ακρίβεια του υπολογιστή.

Κάνουμε αντίστοιχη μελέτη για δύο ακόμα τιμές της ενέργειας, $E=0,01$ και $E=0,04$. Βρίσκουμε αρχικά αριθμητικά τις 9 πρώτες μ.κ.π.τ., οι οποίες ανήκουν και αυτές στους ίδιους κλάδους του σχήματος Δ.14 με τις μ.κ.π.τ. για $E=0,008$ και συγκεκριμένα στους επάνω κλάδους. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις ποσότητες $\Delta_{j,i}$, $i=1,2,\dots,8$, $\Lambda\Delta_{j,i}$, $i=1,2,\dots,7$, και $\Delta\Lambda\Delta_{j,i}$, $i=1,2,\dots,6$ για $j=1,2,3,4$ μέσω των (Δ.5.3.3), (Δ.5.3.4) και (Δ.5.3.5) αντίστοιχα. Όλα αυτά τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στους πίνακες Δ.9 και Δ.10 για $E=0,01$ και $E=0,04$ αντίστοιχα.

Από τα στοιχεία των πινάκων Δ.3, Δ.9 και Δ.10 για τις τιμές των περιόδων των διαδοχικών μ.κ.π.τ. συμπεραίνουμε ότι αυτές τείνουν γενικά να έχουν μια γραμμική αύξηση συναρτήσει της τάξης των μ.κ.π.τ. .

Εξετάζουμε στη συνέχεια, τις τιμές των λόγων των διαφορών των αρχικών συνθηκών διαδοχικών μ.κ.π.τ., $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,7$, για την ίδια τιμή της ενέργειας E (Σχήματα Δ.18β και γ). Παρατηρούμε ότι για $E=0,01$ έχουμε καμπύλες με την ίδια μορφολογία με αυτές που είχαμε για $E=0,008$. Οι καμπύλες που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες SR και Sr πρακτικά ταυτίζονται συνεχώς, ενώ οι καμπύλες για τα |PSR| και |PSr| διαφέρουν, με αυτήν της συντεταγμένης |PSR| να βρίσκεται πιο κοντά στις καμπύλες των SR και Sr και να ταυτίζεται μαζί τους για μικρότερο i από την καμπύλη του |PSr|. Πρακτικά στο τέλος όλες οι καμπύλες ταυτίζονται και είναι σχεδόν οριζόντιες δείχνοντας

ότι έχουν φτάσει κοντά στην οριακή τους τιμή. Στην περίπτωση $E=0,04$ τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά παρότι οι καμπύλες των SR και Sr και πάλι πρακτικά ταυτίζονται. Οι καμπύλες των $|PSR|$ και $|PSr|$ διαφέρουν από αυτές των SR και Sr περισσότερο από πριν. Η καμπύλη του $|PSr|$ βρίσκεται αριθμητικά πλησιέστερα σ' αυτές, σε αντίθεση με ότι συνέβαινε στις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι τέσσερις καμπύλες ταυτίζονται πρακτικά μόνο στο τελευταίο σημείο του διαγράμματος, δηλαδή σε πολύ μεγαλύτερες τιμές του i από ότι στις άλλες περιπτώσεις. Επίσης οι τέσσερις αυτές καμπύλες έχουν μια σαφή αρνητική κλίση στο τέλος του σχήματος ενδεικτικό του ότι απέχουν αρκετά από την οριακή τους τιμή.

i	T	SR	Sr	$ PSR $	$ PSr $
1	813,793812	4,231005	1,936269	10,621324	9,630610
2	1194,298652	4,165443	1,867315	10,628853	9,522490
3	1556,496497	4,144526	1,845315	10,631460	9,481225
4	1911,224466	4,135590	1,835917	10,632598	9,462454
5	2262,305023	4,131274	1,831378	10,633152	9,453131
6	2611,427826	4,129049	1,829038	10,633439	9,448258
7	2959,440308	4,127858	1,827785	10,633593	9,445630
8	3306,801908	4,127205	1,827098	10,633677	9,444183
9	3653,774402	4,126841	1,826716	10,633724	9,443377
Δ					
1	-380,504840	0,065562	0,068954	-0,007529	0,108119
2	-362,197845	0,020917	0,022000	-0,002606	0,041266
3	-354,727969	0,008936	0,009398	-0,001138	0,018770
4	-351,080557	0,004316	0,004539	-0,000554	0,009323
5	-349,122804	0,002225	0,002340	-0,000287	0,004873
6	-348,012482	0,001191	0,001253	-0,000154	0,002628
7	-347,361600	0,000653	0,000687	-0,000084	0,001447
8	-346,972494	0,000363	0,000382	-0,000047	0,000807
$\Lambda\Delta$					
1	1,050544	3,134322	3,134322	2,888890	2,620056
2	1,021058	2,340889	2,340889	2,290222	2,198475
3	1,010389	2,070389	2,070389	2,052676	2,013302
4	1,005608	1,939874	1,939874	1,932170	1,913251
5	1,003190	1,867323	1,867324	1,863590	1,853887
6	1,001874	1,824114	1,824112	1,822238	1,817017
7	1,001121	1,797466	1,797465	1,796256	1,793594
$\Delta\Lambda$					
1	0,029486	0,793433	0,793433	0,598668	0,421581
2	0,010669	0,270500	0,270500	0,237546	0,185174
3	0,004781	0,130515	0,130515	0,120506	0,100050
4	0,002417	0,072550	0,072550	0,068580	0,059364
5	0,001317	0,043210	0,043212	0,041353	0,036870
6	0,000752	0,026648	0,026647	0,025982	0,023422

Πίνακας Δ.9 : Στοιχεία για τις αρχικές συνθήκες των 9 μ.κ.π.τ. του συστήματος FH_2 για ενέργεια $E=0,01$. Ο πίνακας είναι ανάλογος του πίνακα Δ.3.

Όλα αυτά τα στοιχεία αντικατοπτρίζονται και στις τιμές των θετικών σταθερών β των προσεγγιστικών σχέσεων (Δ.5.3.7) τις οποίες υπολογίζουμε όπως πριν. Από τις τιμές των β στον πίνακα Δ.5 αντιλαμβανόμαστε ότι όσο μεγαλώνει η τιμή της ενέργειας E οι

τιμές των β μειώνονται, πράγμα το οποίο δηλώνει την πιο αργή σύγκλιση προς την οριακή τιμή των $\Lambda_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, όπως φαίνεται και από τα σχήματα Δ.18. Σημειώνουμε επίσης ότι οι τιμές των β πρακτικά ταυτίζονται για τις συντεταγμένες SR και Sr, ενώ είναι διαφορετικές για τα |PSR| και |PSr|, με την τιμή που αντιστοιχεί στο |PSr| για E=0,04 να είναι μεγαλύτερη από αυτή του |PSR|, όπως αναμέναμε από τα σχήματα Δ.18.

i	T	SR	Sr	PSR	PSr
1	800,317269	4,630739	2,356688	12,951997	12,154593
2	1174,033711	4,540026	2,261281	12,955475	12,125220
3	1542,694997	4,510181	2,229892	12,957033	12,113431
4	1909,185790	4,497232	2,216273	12,957782	12,107916
5	2274,627281	4,490830	2,209539	12,958170	12,105092
6	2639,501101	4,487415	2,205948	12,958381	12,103559
7	3004,040680	4,485505	2,203939	12,958501	12,102693
8	3368,371305	4,484401	2,202778	12,958571	12,102190
9	3732,565961	4,483750	2,202093	12,958612	12,101892
Δ					
1	-373,716442	0,090714	0,095408	-0,003478	0,029374
2	-368,661287	0,029844	0,031389	-0,001558	0,011788
3	-366,490792	0,012949	0,013619	-0,000749	0,005515
4	-365,441491	0,006403	0,006734	-0,000388	0,002824
5	-364,873820	0,003414	0,003591	-0,000211	0,001533
6	-364,539579	0,001910	0,002009	-0,000120	0,000866
7	-364,330626	0,001103	0,001161	-0,000070	0,000503
8	-364,194655	0,000652	0,000685	-0,000041	0,000298
$\Delta\Delta$					
1	1,013712	3,039552	3,039552	2,231687	2,491750
2	1,005922	2,304772	2,304834	2,080350	2,137393
3	1,002871	2,022448	2,022293	1,932188	1,953236
4	1,001556	1,875161	1,875261	1,833707	1,842087
5	1,000917	1,787372	1,787381	1,765776	1,770128
6	1,000574	1,731142	1,730946	1,718206	1,721597
7	1,000373	1,693244	1,693578	1,688472	1,687925
$\Delta\Delta\Delta$					
1	0,007790	0,734780	0,734717	0,151338	0,354358
2	0,003051	0,282324	0,282541	0,148162	0,184156
3	0,001316	0,147287	0,147032	0,098481	0,111149
4	0,000639	0,087788	0,087880	0,067931	0,071959
5	0,000343	0,056231	0,056435	0,047571	0,048531
6	0,000200	0,037898	0,037367	0,029734	0,033672

Πίνακας Δ.10 : Στοιχεία για τις αρχικές συνθήκες των 9 μ.κ.π.τ. του συστήματος FH₂ για ενέργεια E=0,04. Ο πίνακας είναι ανάλογος του πίνακα Δ.3.

Οι οριακές τιμές στις οποίες τείνουν οι $\Lambda_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, υπολογίζονται και πάλι από τη σχέση (Δ.5.3.10) και σημειώνονται στον πίνακα Δ.6. Παρατηρούμε ότι τα τέσσερα όρια πρακτικά ταυτίζονται μεταξύ τους αν και όσο αυξάνει η ενέργεια αυξάνουν και οι μεταξύ τους διαφορές. Συγκεκριμένα έχουμε :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda \Delta_{j,i} \cong \begin{cases} 1,76 & \text{για } E=0,01 \\ 1,625 & \text{για } E=0,04 \end{cases}, \quad j=1,2,3,4 \quad (\Delta.5.3.12).$$

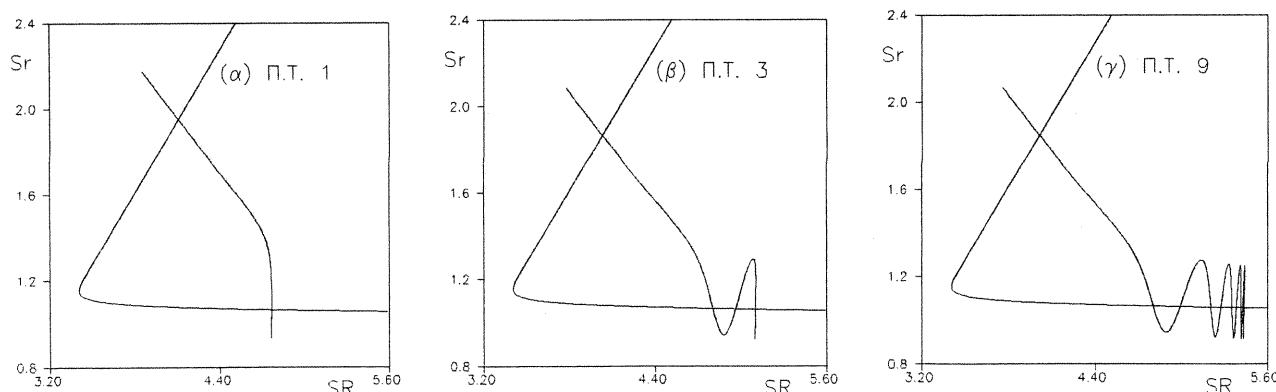
Από τις (Δ.5.3.11) και (Δ.5.3.12) παρατηρούμε ότι με την αύξηση της ενέργειας το συγκεκριμένο όριο ελαττώνεται.

Οπως και στην περίπτωση για $E=0,008$, κάνουμε πρόβλεψη για τις αρχικές συνθήκες της μ.κ.π.τ. 10 με μεγάλη επιτυχία, αφού το υπολογιστικό πρόγραμμα υπολογίζει σύντομα τις πραγματικές αρχικές συνθήκες της μ.κ.π.τ. 10, οι οποίες σημειώνονται στον πίνακα Δ.9.

Συνοψίζοντας, σημειώνουμε ότι η μορφολογική αναλογία των μ.κ.π.τ. του σχήματος Δ.13 αντανακλάται στις αριθμητικές τιμές των αρχικών τους συνθηκών, δίνοντας μας τη δυνατότητα να τις προσεγγίσουμε με πολύ απλές αριθμητικές διαδικασίες, υπολογίζοντας ποσότητες οι οποίες είναι ανεξάρτητες των αρχικών συνθηκών, αλλά μεταβάλλονται μόνο ως συνάρτηση της ενέργειας E ($\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda \Delta_{j,i}$). Αυτή η απλή δομή μας δίνει τη δυνατότητα της επιτυχούς πρόβλεψης των αρχικών συνθηκών της επόμενης μ.κ.π.τ. .

Δ.5.4. Αριθμητικά αποτελέσματα για το σύστημα FD_2 .

Η μορφή του δυναμικού FD_2 όπως φαίνεται στο σχήμα Δ.9a, για $\theta=0^\circ$, ταυτίζεται με αυτή του συστήματος FH_2 (Σχήμα Δ.7a), αφού οι συντεταγμένες SR και Sr στα δύο προβλήματα συνδέονται μεταξύ τους με μια απλή αλλαγή κλίμακας, όπως φαίνεται εύκολα από τις σχέσεις (Δ.5.1.4), αφού στη συγκεκριμένη περίπτωση $\alpha'_3=\alpha_3$ (Σχέσεις Δ.4.3). Δεν υπάρχει όμως κάποιος κανονικός μετασχηματισμός ανάμεσα στις συντεταγμένες SR , Sr , PSR και PSr του συστήματος FH_2 και στις αντίστοιχες συντεταγμένες του συστήματος FD_2 , μέσω του οποίου θα μπορούσαμε να βρούμε τις αντίστοιχες μ.κ.π.τ. στο σύστημα FD_2 , γνωρίζοντας τις μ.κ.π.τ. του συστήματος FH_2 . Ετσι βρίσκουμε αριθμητικά τις αντίστοιχες μ.κ.π.τ. στο σύστημα FD_2 και τις επεξεργαζόμαστε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.



Σχήμα Δ.20 : Οι μη κανονικές περιοδικές τροχιές α) 1 β) 3 και γ) 9 του συστήματος FD_2 στο επίπεδο SR Sr για $E=0,01$. Μορφολογικά είναι ίδιες με τις αντίστοιχες μ.κ.π.τ. του συστήματος FH_2 (Σχήμα Δ.13). Η επιφάνεια τομής Poincaré δίνεται από τη σχέση (Δ.5.1.5). Η τομή της με το επίπεδο SR Sr σημειώνεται στα σχήματα.

Οι αρχικές συνθήκες των 9 μ.κ.π.τ. για ενέργεια $E=0,01$ και οι ποσότητες $\Delta_{j,i}$, $i=1,2,\dots,8$, $\Lambda\Delta_{j,i}$, $i=1,2,\dots,7$ και $\Delta\Lambda\Delta_{j,i}$, $i=1,2,\dots,6$, $j=1,2,3,4$ δίνονται στον πίνακα Δ.11. Στο σχήμα Δ.20 έχουμε σχεδιάσει τις μ.κ.π.τ. 1, 3 και 9 στο επίπεδο SR Sr. Παρατηρούμε ότι η μορφολογία τους είναι ίδια με αυτήν των αντίστοιχων μ.κ.π.τ. του συστήματος FH₂ (Σχήμα Δ.13). Σημειώνουμε εδώ ότι η επιφάνεια τομής Poincaré η οποία φαίνεται στα σχήματα Δ.20 δίνεται από τη σχέση (Δ.5.1.5).

i	T	SR	Sr	PSR	PSr
1	1141,435626	4,107277	1,950349	14,989864	12,905546
2	1678,222158	4,047804	1,884867	14,998078	12,748577
3	2189,275335	4,029116	1,864291	15,000735	12,690347
4	2690,071471	4,021262	1,855644	15,001853	12,664438
5	3185,953144	4,017536	1,851542	15,002382	12,651835
6	3679,245302	4,015653	1,849468	15,002649	12,645386
7	4171,096660	4,014665	1,848380	15,002790	12,641982
8	4662,120294	4,014135	1,847797	15,002865	12,640151
9	5152,659582	4,013847	1,847480	15,002906	12,639154
Δ					
1	-536,786532	0,059474	0,065483	-0,008213	0,156969
2	-511,053177	0,018688	0,020576	-0,002657	0,058230
3	-500,796136	0,007853	0,008647	-0,001118	0,025909
4	-495,881674	0,003726	0,004102	-0,000529	0,012603
5	-493,292158	0,001884	0,002074	-0,000267	0,006449
6	-491,851358	0,000988	0,001088	-0,000140	0,003404
7	-491,023634	0,000530	0,000583	-0,000075	0,001831
8	-490,539288	0,000288	0,000317	-0,000041	0,000997
$\Lambda\Delta$					
1	1,050354	3,182475	3,182475	3,090654	2,695675
2	1,020481	2,379574	2,379574	2,377986	2,247464
3	1,009911	2,107898	2,107898	2,110852	2,055855
4	1,005249	1,977983	1,977983	1,980088	1,954145
5	1,002929	1,906597	1,906596	1,907870	1,894795
6	1,001686	1,864687	1,864689	1,865341	1,858573
7	1,000987	1,839281	1,839278	1,840382	1,836064
$\Delta\Lambda\Delta$					
1	0,029872	0,802901	0,802901	0,712668	0,448211
2	0,010571	0,271676	0,271675	0,267135	0,191609
3	0,004661	0,129915	0,129915	0,130763	0,101710
4	0,002320	0,071386	0,071387	0,072218	0,059350
5	0,001244	0,041910	0,041908	0,042529	0,036222
6	0,000698	0,025405	0,025411	0,024959	0,022510

Πίνακας Δ.11 : Στοιχεία για τις αρχικές συνθήκες των 9 μ.κ.π.τ. του συστήματος FD₂ για ενέργεια $E=0,01$. Ο πίνακας είναι ανάλογος του πίνακα Δ.3.

Οπως και στην περίπτωση του συστήματος FH₂ οι ποσότητες $\Delta\Lambda\Delta_{j,i}$ τείνουν στο 0 καθώς $i \rightarrow +\infty$ και προσεγγίζονται πολύ καλά από μια σχέση της μορφής (Δ.5.3.7) για κάθε συντεταγμένη. Οι αντίστοιχες τιμές των θετικών σταθερών α και β δίνονται στον πίνακα Δ.12. Το όριο των ποσοτήτων $\Lambda\Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$ καθώς $i \rightarrow +\infty$ υπολογίζεται σύμφωνα με τη

σχέση (Δ.5.3.10). Οι τιμές των ορίων για κάθε συντεταγμένη αναφέρονται στον πίνακα Δ.13 απ' όπου βλέπουμε ότι τα τέσσερα όρια πρακτικά ταυτίζονται. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Lambda \Delta_{j,i} \cong 1,805 , \quad j=1,2,3,4 \quad (\Delta.5.4.1).$$

Σημειώνουμε ότι αυτή η τιμή του ορίου είναι διαφορετική από την τιμή που βρήκαμε στο σύστημα FH_2 για $E=0,01$ (Πίνακας Δ.6 και σχέση (Δ.5.3.12)).

Οπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις η πρόβλεψη που κάνουμε για τις αρχικές συνθήκες της μ.κ.π.τ. 10 είναι επιτυχής και το υπολογιστικό πρόγραμμα βρίσκει σχετικά εύκολα τις πραγματικές αρχικές συνθήκες, οι οποίες αναφέρονται στον πίνακα Δ.14.

Από τους πίνακες Δ.9 και Δ.11 παρατηρούμε ότι οι περίοδοι T των ίδιων μ.κ.π.τ. (για την ίδια ενέργεια $E=0,01$) διαφέρουν αρκετά, με τις τιμές των περιόδων στο σύστημα FD_2 να είναι αρκετά μεγαλύτερες. Παρ' όλα αυτά, οι περίοδοι φαίνεται ότι τελικά τείνουν να αυξάνονται γραμμικά συναρτήσει της τάξης της μ.κ.π.τ., όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, μόνο που το βήμα αύξησης είναι διαφορετικό κάθε φορά.

Είναι λοιπόν φανερό ότι τα συμπεράσματα, στα οποία καταλήγουμε από τη μελέτη των μ.κ.π.τ. στο σύστημα FH_2 , ισχύουν και για όλα τα ισοτοπικά του ανάλογα, αφού η μορφολογία των μ.κ.π.τ., η οποία αντανακλάται στις διάφορες εμπειρικές σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε, καθορίζεται από τη μορφή του δυναμικού του συστήματος η οποία είναι πρακτικά η ίδια για όλα τα ισοτοπικά μοντέλα για $\theta=0^\circ$ (Σχήματα Δ.7α και Δ.9).

	SR	Sr	PSR	PSr
α	0,644922	0,644866	0,679627	0,451033
β	0,542836	0,542812	0,554588	0,502108

Πίνακας Δ.12 : Οι τιμές των παραμέτρων α και β των συναρτήσεων $\alpha \cdot e^{-\beta i}$, $i \geq 3$, οι οποίες προσεγγίζουν τις τιμές $\Lambda \Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,6$ για κάθε συντεταγμένη SR, Sr, |PSR|, |PSr| στο σύστημα FD_2 με ενέργεια $E=0,01$.

OPIA				
SR	Sr	PSR	PSr	
1,805804	1,805798	1,808431	1,802516	

Πίνακας Δ.13 : Τα όρια στα οποία τείνουν οι ποσότητες $\Lambda \Delta_{j,i}$, $j=1,2,3,4$, $i=1,2,\dots,7$ όταν $i \rightarrow +\infty$ σύμφωνα με τη σχέση (Δ.5.3.10) για το σύστημα FD_2 με ενέργεια $E=0,01$.

i	T	SR	Sr	PSR	PSr
10	5642,912651	4,013689	1,847306	15,002928	12,638606

Πίνακας Δ.14 : Οι αρχικές συνθήκες και η περίοδος T της μ.κ.π.τ. 10 του συστήματος FD_2 , με ενέργεια $E=0,01$.

Δ.6. Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.

Εξετάσαμε αριθμητικά μια ομάδα μη κανονικών περιοδικών τροχιών (irregular periodic orbits), ενός ρεαλιστικού δυναμικού συστήματος, το οποίο περιγράφει την αλληλεπίδραση δύο ατόμων υδρογόνου και ενός ατόμου φθορίου, όταν τα άτομα

βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή και το φθόριο πλησιάζει από δεξιά ή αριστερά τα δύο άτομα υδρογόνου. Οι μ.κ.π.τ. υπάρχουν από μια συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας Ε του συστήματος και πάνω, χωρίς να προέρχονται από διακλάδωση κάποιας προϋπάρχουσας περιοδικής τροχιάς. Όλες οι μ.κ.π.τ. γεννιούνται ανά ζεύγη, οπότε έχουμε δύο κλάδους περιοδικών τροχιών για κάθε μ.κ.π.τ.. Όλες οι μ.κ.π.τ. παρουσιάζουν μια μορφολογική αναλογία μεταξύ τους αφού όλες κάνουν κάποιες ταλαντώσεις στο κανάλι του δυναμικού, το οποίο αντιστοιχεί στην κατάσταση $H_2 + F$. Ο αριθμός αυτών των ταλαντώσεων αυξάνει με την τάξη κάθε μ.κ.π.τ.. Οι μ.κ.π.τ. των ίδιων κλάδων έχουν ακόμα περισσότερες ομοιότητες αφού έχουν παρόμοια συμπεριφορά και σε περιοχές μακριά από το κανάλι της κατάστασης $H_2 + F$.

Αυτές οι μορφολογικές ομοιότητες των μ.κ.π.τ. αντανακλώνται και στις συντεταγμένες των τομών των περιοδικών τροχιών, με μια κατάλληλη επιφάνεια Poincaré. Εδώ δε χρησιμοποιούμε τη συνηθισμένη μορφή της επιφάνειας Poincaré, $q_i = \text{σταθερά}$, όπου q_i μια οποιαδήποτε συντεταγμένη του συστήματος, γιατί το δυναμικό δεν παρουσιάζει συμμετρίες και ένα τέτοιο επίπεδο στο χώρο φάσεων θα τεμνόταν μόνο από μερικές περιοδικές τροχιές, σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου φάσεων, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η γενική κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος. Έτσι χρησιμοποιήσαμε μια επιφάνεια, η οποία δεν είναι επίπεδη στο χώρο φάσεων, αλλά έχει τέτοια μορφή ώστε να μπορούν να την τμήσουν όσο το δυνατόν περισσότερες τροχιές του συστήματος. Επειδή ακριβώς αυτή η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη χρειάζεται να αναπτυχθεί μια διαφορετική υπολογιστική διαδικασία, για την αριθμητική εύρεση των τομών των τροχιών του συστήματος με αυτήν. Αυτή η διαδικασία αναπτύσσεται αναλυτικά στην παράγραφο Δ.5.1. Το γεγονός ότι η επιφάνεια τομής δεν είναι επίπεδη, μας ώθησε στη μελέτη των τροχιών στο επίπεδο των συντεταγμένων SR και Sr και όχι επάνω στην επιφάνεια τομής. Πάντως η αριθμητική μελέτη των αρχικών συνθηκών έγινε στις τιμές των τομών των τροχιών με την επιφάνεια Poincaré.

Τα συμπεράσματα της μελέτης μας θα μπορούσαν να συνοψιστούν στα ακόλουθα:

1. Η μορφολογική αναλογία των μ.κ.π.τ. της ομάδας που μελετήσαμε, αντανακλάται με πολλούς τρόπους στις αριθμητικές τιμές διαφόρων ποσοτήτων των τροχιών (π.χ. αρχικές συνθήκες, περίοδος κ.λ.π.). Μας δίνεται έτσι η δυνατότητα να προσεγγίσουμε τις διάφορες ποσότητες με απλές μαθηματικές σχέσεις.
2. Η περίοδος T των μ.κ.π.τ. του ίδιου κλάδου αυξάνει σχεδόν γραμμικά με την αύξηση της τάξης i της μ.κ.π.τ., είτε για μια συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας του συστήματος, είτε για τα σημεία γέννησης των διαφόρων μ.κ.π.τ.. Αυτή η γραμμική αύξηση είναι διαφορετική για κάθε τιμή της ενέργειας για το ίδιο ισοτοπικό πρόβλημα. Επίσης είναι διαφορετική για διαφορετικά ισοτοπικά μοντέλα με την ίδια τιμή της ενέργειας. Μπορούμε λοιπόν πολύ εύκολα να υπολογίσουμε με αρκετή ακρίβεια την τιμή της περιόδου κάποιας μ.κ.π.τ., γνωρίζοντας την εμπειρική γραμμική σχέση που συνδέει όλες τις προηγούμενες.
3. Οι λόγοι των διαφορών των συντεταγμένων, δύο διαδοχικών μ.κ.π.τ., για μια συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας, τείνουν με την αύξηση της τάξης των μ.κ.π.τ. σε κάποια οριακή τιμή, η οποία είναι πρακτικά η ίδια για όλες τις συντεταγμένες. Η τιμή αυτού του ορίου αλλάζει με την αλλαγή της ενέργειας E του συστήματος και συγκεκριμένα φαίνεται να μειώνεται με την αύξηση της ενέργειας. Επίσης αυτό το όριο είναι διαφορετικό για διαφορετικά ισοτοπικά μοντέλα, τα οποία όμως βρίσκονται στην ίδια ενέργεια E. Καταλήξαμε λοιπόν σε μια ποσότητα η οποία χαρακτηρίζει το κάθε ισοτοπικό ανάλογο του συστήματος FH_2 , για κάθε τιμή της ενέργειας E, η οποία είναι η ίδια για όλες τις συντεταγμένες παρά το γεγονός ότι οι τιμές των συντεταγμένων αυτών είναι εντελώς διαφορετικές μεταξύ τους. Αυτή η ποσότητα αντανακλά τη μορφολογική αναλογία των διαφόρων μ.κ.π.τ.. Σημειώνουμε επίσης ότι όσο αυξάνει η τιμή της ενέργειας τόσο πιο αργή γίνεται η σύγκλιση των διαδοχικών τιμών προς το εκάστοτε όριο.

4. Προσεγγίζοντας με έναν πολύ απλό εμπειρικό εκθετικό νόμο τις τιμές των διαφορών των παραπάνω λόγων, για διάφορες τιμές της ενέργειας και διαφορετικά ισοτοπικά μοντέλα, μπορέσαμε να υπολογίσουμε με αρκετή ακρίβεια τα όρια στα οποία τείνουν οι λόγοι. Επίσης με αυτή τη διαδικασία μπορέσαμε να αναπαράγουμε όλα τα χαρακτηριστικά των τιμών των λόγων, όπως για παράδειγμα την ταχύτητα σύγκλισης των λόγων προς την οριακή τους τιμή. Όλα αυτά δείχνουν ότι η προσέγγιση μας είναι αρκετά καλή.
5. Η μεγαλύτερη επιτυχία της παραπάνω εμπειρικής διαδικασίας είναι ότι χρησιμοποιώντας τον εμπειρικό νόμο που βρήκαμε, καθώς και κάποιες αρχικές συνθήκες για μερικές γνωστές μ.κ.π.τ., μπορούμε να προβλέψουμε με πολύ καλή ακρίβεια τις αρχικές συνθήκες της επόμενης, άγνωστης εκ των προτέρων, μ.κ.π.τ. . Επαναλαμβάνοντας τώρα την παραπάνω διαδικασία, θεωρώντας γνωστές τις αρχικές συνθήκες της μ.κ.π.τ. που βρήκαμε προηγουμένως μπορούμε να προβλέψουμε την επόμενη μ.κ.π.τ., κ.ο.κ. . Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι η ομοιότητα που υπάρχει στις μορφές των μ.κ.π.τ., κρύβεται και μέσα στις αριθμητικές τιμές των αρχικών τους συνθηκών, δίνοντάς μας τη δυνατότητα σχετικά εύκολα να κάνουμε προβλέψεις για νέες μ.κ.π.τ. .
6. Μελετήσαμε περισσότερο τις διάφορες μ.κ.π.τ. στο σύστημα FH_2 . Ανάλογα όμως συμπεράσματα είχαμε και όταν εξετάσαμε την περίπτωση του συστήματος FD_2 , πράγμα το οποίο οφείλεται στη μορφολογική ομοιότητα των δυναμικών των δύο συστημάτων. Έτσι και τα δύο δυναμικά παρουσιάζουν ίδιας μορφής μ.κ.π.τ., οι οποίες ικανοποιούν ίδιους εμπειρικούς νόμους, έχοντας μόνο διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους. Επειδή και τα άλλα ισοτοπικά ανάλογα του συστήματος μας π.χ. FHD ή FDH παρουσιάζουν δυναμικό της ίδιας μορφής με το FH_2 ή το FD_2 , πιστεύουμε ότι και σε αυτές τις περιπτώσεις θα ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα.

Κατορθώσαμε λοιπόν να εκφράσουμε μέσω απλών εμπειρικών σχέσεων, τη μορφολογική αναλογία μιας ομάδας μη κανονικών τροχιών του συστήματος FH_2 και των ισοτοπικών του αναλόγων. Οι σχέσεις αυτές μας δίνουν τη δυνατότητα να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά αυτών των τροχιών και να προβλέψουμε την ύπαρξη τροχιών ανωτέρας τάξεως.

Γενικά Συμπεράσματα

Μελετήσαμε αριθμητικά και αναλυτικά μερικά απλά δυναμικά συστήματα δύο και τριών βαθμών ελευθερίας, προσπαθώντας να δούμε κατά πόσο οι δομές που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων συστημάτων τριών βαθμών ελευθερίας επηρεάζονται από τα τοπολογικά χαρακτηριστικά των συστημάτων δύο βαθμών ελευθερίας. Για να είναι εύκολη αυτή η σύνδεση επιλέξαμε κατάλληλα δυναμικά συστήματα. Έτσι η τετραδιάστατη συμπλεκτική απεικόνιση που εξετάσαμε στο μέρος Β προκύπτει από τη σύζευξη δύο ίδιων διδιάστατων συμπλεκτικών απεικονίσεων. Επομένως αλλαγή της παραμέτρου σύζευξης, μας οδηγεί ομαλά από τις δύο ανεξάρτητες διδιάστατες απεικονίσεις στην καθαρά τετραδιάστατη απεικόνιση. Το επίπεδο περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων που εξετάσαμε στο μέρος Γ είναι ένα Χαμιλτονιανό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας αλλά η διαδικασία εκτίμησης της περιοχής πρακτικής ευστάθειας γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας που εφαρμόσαμε σ' αυτό, γενικεύεται εύκολα και σε συστήματα περισσοτέρων βαθμών ελευθερίας. Τέλος στο μέρος Δ μελετήσαμε τις μη κανονικές περιοδικές τροχιές ενός Χαμιλτονιανού συστήματος τριών βαθμών ελευθερίας στην ειδική περίπτωση όπου μόνο οι δύο από αυτούς είναι ενεργοί.

Στηριζόμενοι στα συμπεράσματα της μελέτης αυτών των συστημάτων που αναφέρονται στις παραγράφους Β.4, Γ.7 και Δ.6 μπορούμε να συνοψίσουμε τα βασικά αποτελέσματα της έρευνάς μας στα εξής :

1. Τα χαρακτηριστικά των δύο διδιάστατων απεικονίσεων από τις οποίες προέρχεται η τετραδιάστατη απεικόνιση επηρεάζουν δραστικά την τοπολογία του τετραδιάστατου χώρου φάσεων για μικρές τιμές της παραμέτρου σύζευξης.
2. Στα επίπεδα προβολής της τετραδιάστατης απεικόνισης δημιουργούνται συγκεκριμένες δομές, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με την τοπολογία των διδιάστατων απεικονίσεων. Επίσης και εκεί που οι προβολές φαίνονται πολύπλοκες, υπάρχει κρυμμένη μια δομή η οποία αποκαλύπτεται αν γνωρίζουμε πως επιδρούν τα χαρακτηριστικά των διδιάστατων απεικονίσεων στον τετραδιάστατο χώρο φάσεων.
3. Περιγράφουμε ικανοποιητικά την επίδραση των χαρακτηριστικών των διδιάστατων απεικονίσεων στις δομές του τετραδιάστατου χώρου φάσεων, μέσω απλών εμπειρικών νόμων.
4. Συνδυάζοντας κατάλληλα αναλυτικές μεθόδους και αριθμητικούς υπολογισμούς, αναπτύσσουμε μια γενική διαδικασία εκτίμησης της περιοχής πρακτικής ευστάθειας γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας, στηριζόμενοι στις ιδέες της θεωρίας του Nekhoroshev. Η διαδικασία αυτή μπορεί να εφαρμοστεί σε Χαμιλτονιανό σύστημα οσωνδήποτε βαθμών ελευθερίας.
5. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόστηκε στο επίπεδο πρόβλημα των τριών σωμάτων και συγκεκριμένα στο σύστημα Ήλιου - Δία - αστεροειδή δίνοντας πολύ καλά αποτελέσματα, αφού βελτιώσαμε σημαντικά προγενέστερες εκτιμήσεις του μεγέθους της περιοχής πρακτικής ευστάθειας. Συγκεκριμένα κατορθώσαμε για πρώτη φορά να εξασφαλίσουμε την πρακτική ευστάθεια του συστήματος για μια περιοχή ρεαλιστικού μεγέθους, με πραγματικό φυσικό νόημα.
6. Μελετήσαμε τις μη κανονικές περιοδικές τροχιές ενός σημαντικού χημικού δυναμικού συστήματος χρησιμοποιώντας ως επιφάνεια τομής Poincaré μια επιφάνεια στο χώρο φάσεων, η οποία δεν είχε τη συνηθισμένη μορφή $q_i = \text{staθερά}$. Εφαρμόσαμε επίσης μια κατάλληλη υπολογιστική διαδικασία για την αριθμητική εύρεση των τομών των τροχιών του συστήματος με την επιφάνεια αυτή.

7. Καταλήξαμε σε μια εμπειρική διαδικασία, η οποία μας δίνει τη δυνατότητα επιτυχούς πρόβλεψης των αρχικών συνθηκών μιας μη κανονικής περιοδικής τροχιάς. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται σε μια ομάδα μη κανονικών περιοδικών τροχιών, οι οποίες παρουσιάζουν μεταξύ τους μορφολογικές ομοιότητες.

Βιβλιογραφία

1. Arnold V. I. : 1963, Russ. Math. Surveys, 18, 85.
2. Arnold V. I. : 1964, Dokl. Akad. Nauk. , SSSR, 156, 9.
3. Barbanis B. : 1966, Astron. J. , 71, 415.
4. Barbanis B. : 1984, Celest. Mech. , 33, 385.
5. Barbanis B. : 1985, Celest. Mech. , 36, 257.
6. Barbanis B. : 1986, Celest. Mech. , 39, 345.
7. Benettin G., Galgani L. & Strelcyn J. M. : 1976, Phys. Rev. , A14, 2338.
8. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A. & Strelcyn J. M. : 1980a, Meccanica, March, 21.
9. Benettin G., Cercignani C., Galgani L. & Giorgilli A. : 1980b, Let. N. Cim. , 28, 1.
10. Benettin G., Galgani L. & Giorgilli A. : 1980c, Let. N. Cim. , 29, 163.
11. Bensimon D. & Kadanoff L. P. : 1984, Physica, 13D, 82.
12. Birkhoff G. D. : 1927, "Dynamical systems", New York.
13. Bountis T. C. : 1981, Physica, 3D, 577.
14. Bountis T. & Helleman R. H. G. : 1981, J. Math. Phys. , 22, 1867.
15. Bountis T. & Tompaidis S. : 1990, in "Numerical problems in future particle accelerators", eds. Scandale W. & Turchetti G. , 112.
16. Broucke R. A. : 1969, NASA Technical Report, 32, 1360.
17. Brown F. B. & Truhlar D. G. : 1985, Chem. Phys. Let. , 117, 307.
18. Brown F. B., Steckler R., Schwenke D. W., Truhlar D. G. & Garrett B. C. : 1985, J. Chem. Phys. , 82, 188.
19. Celletti A. & Giorgilli A. : 1991, Celest. Mech. , 50, 31.
20. Cherry T. M. : 1924a, Proc. Camb. Phil. Soc. , 22, 325.
21. Cherry T. M. : 1924b, Proc. Camb. Phil. Soc. , 22, 510.
22. Chirikov B. V. : 1979, Phys. Reports, 52, 263.
23. Chirikov B. V., Ford J. & Vivaldi F. : 1979, in "Nonlinear Dynamics and the Beam - Beam Interaction", eds. Month M. & Herrera J. C. , Am. Inst. Phys. Comf. Proc. , 323.
24. Contopoulos G. : 1960, Z. Astrophys. , 49, 273.
25. Contopoulos G. : 1963, Astron. J. , 68, 763.
26. Contopoulos G. : 1965, Astron. J. , 70, 526.
27. Contopoulos G. : 1968, Astroph. J. , 153, 83.
28. Contopoulos G. : 1970a, Astron. J. , 75, 96.
29. Contopoulos G. : 1970b, Astron. J. , 75, 108.
30. Contopoulos G. : 1971, Astron. J. , 76, 147.
31. Contopoulos G. : 1983a, Astron. Astroph. , 117, 89.
32. Contopoulos G. : 1983b, Physica, 8D, 142.
33. Contopoulos G. : 1983c, Let. N. Cim. , 38, 257.
34. Contopoulos G. : 1984, Physica, 11D, 179.
35. Contopoulos G. : 1985, in "Stability of the solar system and its minor natural and artificial bodies", ed. Szebehely, 97.
36. Contopoulos G. : 1986a, Part. Acceler. , 19, 107.
37. Contopoulos G. : 1986b, Celest. Mech. , 38, 1.
38. Contopoulos G. : 1986c, Astron. Astroph. , 161, 244.
39. Contopoulos G. : 1988, Celest. Mech. , 42, 239.
40. Contopoulos G. : 1990, Astron. Astroph. , 231, 41.
41. Contopoulos G. & Barbanis B. : 1994, Celest. Mech. Dyn. Astron. , 59, 279.
42. Contopoulos G. & Giorgilli A. : 1988, Meccanica, 23, 19.

43. Contopoulos G. & Kaufmann D. : 1992, *Astron. Astroph.* , 253, 379.
 44. Contopoulos G. & Magnenat P. : 1985, *Celest. Mech.* , 37, 387.
 45. Contopoulos G. & Moutoulas M. : 1965, *Astron. J.* , 70, 817.
 46. Contopoulos G. & Moutoulas M. : 1966, *Astron. J.* , 71, 687.
 47. Contopoulos G. & Papayannopoulos Th. : 1980, *Astron. Astroph.* , 92, 33.
 48. Contopoulos G. & Pinotsis A. : 1984, *Astron. Astroph.* , 133, 49.
 49. Contopoulos G. & Polymilis C. : 1993, *Phys. Rev.* , E46, 1546.
 50. Contopoulos G. & Voglis N. : 1997, *Astron. Astroph.* , 317, 73.
 51. Contopoulos G. & Zikides M. : 1984, *Astron. Astroph.* , 90, 198.
 52. Contopoulos G., Magnenat P. & Martinet L. : 1982, *Physica*, 6D, 126.
 53. Contopoulos G., Kandrup H. E. & Kaufmann D. : 1993, *Physica D*, 64, 310.
 54. Contopoulos G., Papadaki H. & Polymilis C. : 1994a, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* , 60, 249.
 55. Contopoulos G., Farantos S. C., Papadaki H. & Polymilis C. : 1994b, *Phys. Rev.* E50, 4399.
 56. Contopoulos G., Grousousakou E. & Voglis N. : 1995, *Astron. Astroph.* , 304, 374.
 57. Dahlqvist P. & Russberg G. : 1990, *Phys. Rev. Let.* , 65, 2837.
 58. Diana E., Galgani L., Giorgilli A. & Scotti A. : 1975, *Boll. Un. Mat. It.* , 11, 84.
 59. Dorizzi B., Grammaticos B., Hietarinta J., Ramani A. & Schwarz F. : 1986, *Phys. Let. A*, 116, 432.
 60. Dunning H. : 1976, *J. Chem. Phys.* , 65, 3854.
 61. Eckmann J.-P. : 1981, *Rev. Mod. Phys.* , 53, 643.
 62. Eckmann J.-P. & Ruelle D. : 1985, *Rev. Mod. Phys.* , 57, 617.
 63. Farantos S. C., Founariotakis M. & Polymilis C. : 1989, *Chem. Phys.* , 135, 347.
 64. Feigenbaum M. J. : 1978, *J. Stat. Phys.* , 19, 25.
 65. Feigenbaum M. J. : 1979, *J. Stat. Phys.* , 21, 669.
 66. Ford J. & Lunsford G. H. , 1970, *Phys. Rev.* , A1, 59.
 67. Founariotakis M. : 1991, "Hamiltonian and equations of motion in generalized coordinates for the N-body system", Report.
 68. Founariotakis M., Farantos S. C., Contopoulos G. & Polymilis C. : 1989, *J. Chem. Phys.* , 91, 1389.
 69. Froeschlé C. : 1970, *Astron. Astroph.* , 9, 15.
 70. Froeschlé C. : 1971, *Astrophys. Space Sci.* , 14, 110.
 71. Froeschlé C. : 1972, *Astron. Astroph.* , 16, 172.
 72. Froeschlé C. & Scheidecker J.-P. : 1973a, *Astron. Astroph.* , 22, 431.
 73. Froeschlé C. & Scheidecker J.-P. : 1973b, *Astrophys. Space Sci.* , 25, 373.
 74. Giorgilli A. : 1979, *Comp. Phys. Com.* , 16, 331.
 75. Giorgilli A. : 1988, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 48, N. 4, 423.
 76. Giorgilli A. & Galgani L. : 1978, *Celest. Mech.* , 17, 267.
 77. Giorgilli A. & Galgani L. : 1985, *Celest. Mech.* , 37, 95.
 78. Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L. & Simó C. : 1989, *J. Diff. Eqs.* , 77, 167.
 79. Goldstein H. : 1980, "Classical Mechanics" (2nd edition), Addison - Wesley.
 80. Greene J. M. : 1978, *J. Math. Phys.* , 20, 1183.
 81. Greene J. M., MacKay R. S., Vivaldi F. & Feigenbaum M. J. : 1981, *Physica*, 3D, 468.
 82. Gustavson F. G. : 1966, *Astron. J.* , 71, 670.
 83. Hadjidemetriou J. : 1975, *Celest. Mech.* , 12, 255.
 84. Heggie D. C. : 1985, *Celest. Mech.* , 35, 357.
 85. Helleman R. H. G. : 1980, in "Fundamental Problems in Statistical Mechanics", Vol. 5, ed. Cohen E. G. D. , North Holland Publ. , Amsterdam, 165.
 86. Hénon M. : 1969, *Quarterly of Appl. Math.* , XXVII, 291.
 87. Hénon M. : 1976, *Commun. Math. Phys.* , 50, 69.
 88. Hénon M. : 1982, *Physica*, 5D, 412.

89. Hénon M. & Heils C. : 1964, *Astron. J.* , 69, 73.
90. Ichtiaroglou S., Katopodis K. & Michalodimitrakis M. : 1989, *J. Astrophys. Astr.* , 10, 367.
91. Janssen T. & Tjon J. A. : 1983, *J. Phys.* , 16A, 697
92. Kolmogorov A. N. : 1954, *Dokl. Akad. Nauk. , SSSR*, 98, 527.
93. Komineas S., Vrahatis M. N. & Bountis T. : 1994, *Physica A*, 211, 218.
94. Laskar J., Froeschlé C. & Celletti A. : 1992, *Physica D*, 56, 253.
95. Lichtenberg A. J. & Lieberman M. A. : 1983, "Regular and Stochastic Motion", Springer-Verlag, New York.
96. Lorenz E. N. : 1963, *J. Atmos. Sci.* , 20, 130.
97. Lynch G. C., Steckler R., Schwenke D. W., Varandas A. J. C., Truhlar D. G. & Garrett B. C. : 1991, *J. Chem. Phys.* , 94, 7136.
98. MacKay R. S., Meiss J. D. & Percival I. C. : 1984, *Physica*, 13D, 55.
99. Magnenat P. : 1979, *Astron. Astroph.* , 77, 332.
100. Magnenat P. : 1982a, *Celest. Mech.* , 28, 319.
101. Magnenat P. : 1982b, *Astron. Astroph.* , 108, 89.
102. Mao J.-M. & Helleman R. H. G. : 1987, *Phys. Rev.* , A35, 1847.
103. Mao J.-M., Satija I. I. & Hu B. : 1985, *Phys. Rev.* , A32, 1927.
104. Mao J.-M., Satija I. I. & Hu B. : 1986, *Phys. Rev.* , A34, 4325.
105. Martinet L. & Magnenat P. : 1981, *Astron. Astroph.* , 96, 68.
106. Meiss J. D. : 1992, *Rev. Mod. Phys.* , 64, 795.
107. Moser J. : 1958, *Asrton. J.* , 63, 439.
108. Moser J. : 1962, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* , 2, 1.
109. Nekhoroshev N. N. : 1971, *Funct. An. and Appl.* , 5, 338.
110. Nekhoroshev N. N. : 1977, *Russ. Math. Surveys*, 32, 1.
111. Nekhoroshev N. N. : 1979, *Trudy Sem. Petrovsk.* , N. 5, 5 (in russian).
112. Oseledec V. I. : 1968, *Trans. Mosc. Math. Soc.* , 19, 197.
113. Ott E. : 1981, *Rev. Mod. Phys.* , 53, 655.
114. Pesin Y. B. : 1977, *Ups. Mat. Nauk.* , 32, No. 4, 196.
115. Pfenniger D. : 1985, *Astron. Astroph.* , 150, 97.
116. Pinotsis A. D. : 1986, *Astron. Astroph.* , 159, 231.
117. Pinotsis A. D. : 1987, *Astron. Astroph.* , 174, 317.
118. Pinotsis A. D. : 1988, in "Long-Term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems", ed. Roy A. E. , Kluwer Acad. Pub. , 465.
119. Poincaré H. : 1892, " Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", Paris.
120. Polymilis C. : 1991, in "Predictability, Stability and Chaos in N-body Dynamical Systems", ed. Roy A. E. , Plenum Press, 555.
121. Polymilis C. & Hizanidis K. : 1993, *Phys Rev.* , E47, 4381.
122. Polymilis C., Servizi G. & Skokos Ch. : 1997, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* , (in press).
123. Rösler O. E. : 1976, *Phys. Let.* , 57A, 397.
124. Ruelle D. : 1980, *Math. Intelligencer*, 2, 126.
125. Shaw R. S. : 1981, *Z. Naturforsch.* , 36a, 80.
126. Shenker S. J. & Kadanoff L. P. : 1982, *J. Stat. Phys.* , 27, 631.
127. Simó C. : 1989, *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona*, 48, 303.
128. Steckler R., Truhlar D. G. & Garrett B. C. : 1985, *J. Chem. Phys.* , 82.
129. Szebehely V. : 1967, "Theory of orbits", Academic Press.
130. Tennyson J.L., Lieberman M. A. & Lichtenberg A. J. : 1979, in "Nonlinear Dynamics and the Beam - Beam Interaction", eds. Month M. & Herrera J. C. , Am. Inst. Phys. Comf. Proc. , 272.
131. Varandas A. J. C. : 1988, *Adv. Chem. Phys.* , 74, 255.
132. Varandas A. J. C. & Brandao J. : 1982, *Mol. Phys.* , 45, 857.

- 133.Varandas A. J. C. & Silva J. D. : 1986, J. Chem. Soc. Faraday Trans. II, 82, 593.
- 134.Voglis N. & Contopoulos G. : 1994, J. Phys. A, 27, 4899.
- 135.Vrahatis M. N. : 1995, J. Comp. Phys. , 119, 105.
- 136.Whittaker E. T. : 1916, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 37, 95.
- 137.Wood B. P., Lichtenberg A. J. & Lieberman M. A. : 1990, Phys. Rev. , A42, 5885.

Ελληνική βιβλιογραφία

1. Ιχτιάρογλου Σ. : 1990, "Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton", Παν. Θεσσαλονίκης.
2. Φουναριωτάκης Μ. : 1996, προσωπική επικοινωνία.
3. Χατζηδημητρίου Ι. Δ. : 1983, "Θεωρητική Μηχανική" Β' έκδοση, Θεσσαλονίκη.
4. Χατζηδημητρίου Ι. Δ. : 1989, στο "Τάξη και χάος στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα" Τόμος ΙΙ, επιστ. εκδ. Πνευματικός Στ. και Μπούντης Αν. , εκδ. Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα, σελ. 1.
5. Kibble TWB : 1982, "Κλασσική Μηχανική", Ο.Ε.Δ.Β. , Αθήνα.

Στοιχεία των θεμάτων που διαπραγματευόμαστε στην παρούσα διατριβή περιέχονται στις εργασίες :

• **Μέρος Β :**

1. Σκόκος Χ. : 1993, "Μελέτη μιας τετραδιάστατης συμπλεκτικής απεικόνισης" στα "Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Αστρονομικού Συνεδρίου", εκδ. Λασκαρίδης Π. , Εθν. Αστρον. Επιτροπή, Αθήνα, σελ. 491.
2. Skokos Ch., Contopoulos G. & Polymilis C. : 1996, "Non periodic orbits in a four dimensional symplectic map" in "Proc. 2nd Hellenic Astron. Conf.", eds. Contadakis M. E. , Hadjidemetriou J. D. , Mavridis L. N. & Seiradakis J. H. , Thessaloniki, 578.
3. Skokos Ch., Contopoulos G. & Polymilis C. : 1997, "Numerical study of the phase space of a four dimensional symplectic map" in "Hamiltonian Systems with three or more degrees of freedom", ed. Simó C., Plenum Press, (in press).
4. Skokos Ch., Contopoulos G. & Polymilis C. : 1997, "Structures in the phase space of a four dimensional symplectic map", Cel. Mech. Dyn. Astron. , (in press).

• **Μέρος Γ :**

1. Skokos Ch., Contopoulos G. & Giorgilli A. : 1996, "Study of the effective stability in the restricted three body problem" in "Proc. 2nd Hellenic Astron. Conf.", eds. Contadakis M. E. , Hadjidemetriou J. D. , Mavridis L. N. & Seiradakis J. H. , Thessaloniki, 526.
2. Giorgilli A. & Skokos Ch. : 1997, "On the stability of the Trojan asteroids", Astron. Astroph. , 317, 254.

• **Μέρος Δ :**

1. Farantos S., Founariotakis M., Contopoulos G., Polymilis C. & Skokos Ch. : 1997, (in preparation).